Tópicos em Lógica de Primeira Ordem

Rodrigo Freire

Lógica no Avião

Tópicos em Lógica de Primeira Ordem

Rodrigo Freire

Departamento de Filosofia
Universidade de Brasília

Rodrigo Freire, Tópicos em Lógica de Primeira Ordem,
Brasília: Lógica no Avião, 2019.

Série L, Volume 1

I.S.B.N. 978-65-900390-0-2

Prefixo Editorial 900390

Obra publicada com o apoio do PPGFIL/UnB.

UnB

Sumário

Página

Apresentação

Este livro é dedicado à exposição de resultados e métodos básicos do estudo geral do sistema lógico conhecido como lógica clássica de primeira ordem. Para explicar o que consideramos como resultados e métodos básicos da lógica de primeira ordem, é preciso dizer algo sobre o papel fundacional com relação à matemática que esse sistema lógico desempenha.

O pensamento matemático na sua atividade normal de definir e demonstrar manipula, pelo menos de modo aparente, objetos infinitários, como o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o que é diagnosticado como obstáculo à sua fundamentação. Surge a questão se essa manipulação de objetos infinitários é parte essencial do pensamento matemático, se não há como representar a matemática sem recurso ao infinito atual. Há muito o que dizer sobre isso, mas podemos começar a analisar o ponto através da distinção entre o simbolismo matemático e sua interpretação. Observamos que o infinito presente no pensamento matemático não se encontra no simbolismo ele próprio, mas, se em algum lugar, apenas na interpretação. O símbolo '$\mathbb{R}$' não é ele próprio infinito, no máximo sua interpretação pode ser essencialmente infinitária.

A observação acima é um primeiro passo para a tentativa de redução finitária da matemática, contudo tal redução é ainda um objetivo muito distante. Seria possível construir uma representação meramente simbólica do pensamento matemático suspendendo a interpretação do simbolismo e, com isso, a presença do infinito? Como pensar com símbolos sem interpretação e a presença do infinito como um fênomeno de superfície? Como entender o simbolismo sem sair dele? Apesar das dificuldades alguns passos adicionais podem ser considerados, passos que são resultado do interesse histórico na possibilidade de representar a matemática sem recurso ao infinito, e que são dados a partir da distinção entre o simbolismo e sua interpretação. A tentativa é baseada na ideia que bastaria representar o uso dos símbolos, representação de entendimento de outra natureza acerca do simbolismo não é requerida, e isso pode ser feito por meio de regras de uso que são, também, de natureza simbólica.

O pensamento matemático opera por meio de frases na sua atividade de definir e demonstrar. Definições são determinadas por frases descritivas e demonstrações por encadeamentos de frases. O caminho para representar de modo puramente simbólico a atividade matemática passa, então, pela construção de um sistema de frases com a delimitação precisa das suas regras de uso. O emprego das frases nas deduções do sistema é determinado pela estipulação dos axiomas, ou seja, de quais frases podem ser usadas como premissas, e das regras de inferência que determinam quais passagens são permitidas na atividade dedutiva. Também devemos saber como usar frases descritivas para introduzir novos símbolos a partir dos símbolos incialmente estipulados. Um símbolo como '$\mathbb{R}$' seria introduzido no nosso sistema que representa a matemática com uma descrição que determina de modo completo, dentro do sistema, o uso do novo símbolo.

Aqui entra a lógica de primeira ordem que, em parte, contém um sistema dedutivo de frases e regras simbólicas que serve de base para uma tentativa de representação finitária da atividade matemática. Enquanto sistema de base para as pretensões de representação livre de infinitude atual do pensamento matemático, não é aceitável usar o infinito em lugar algum no processo de constituição do mesmo, tampouco no correspondente processo de redução do raciocínio matemático normal aos procedimentos símbólicos desse veículo formal. Não basta constituir o sistema finitariamente, esse é apenas o primeiro passo. É importante também mostrar que o sistema funciona de modo adequado sob a mesma restrição metodológica acerca do infinito. Para isso, há que se mostrar, do modo mais construtivo possível, que as passagens do raciocínio matemático em geral estão representadas no sistema e, ao mesmo tempo, que o sistema não é capaz de deduzir frases além da conta. O segundo dos dois requerimentos acima contém a demanda por demonstrações construtivas da conservatividade das extensões permitidas do sistema.

Nos três primeiros capítulos deste livro apresentamos um sistema dedutivo para a lógica de primeira ordem, aprendemos a incorporar novas regras de dedução que representam raciocínios da matemática em geral, aprendemos que a introdução de novos símbolos com uma descrição não produz resultados indesejados e sobretudo, com o teorema fundamental da teoria das deduções, que o alcance das deduções é determinado pelo alcance da consequência tautológica a partir dos axiomas básicos restritos às quantificações envolvidas. Em momento algum saímos do âmbito finitário nessa parte. Não se trata apenas de mostrar como constituir uma representação finitária de parte do pensamento matemático, mas de mostrar isso finitariamente. Não admitimos apelar ao que queremos eliminar para tentar mostrar que o eliminamos.

O capítulo seguinte é dedicado aos famosos teoremas de Gödel. Indiscutivelmente relevantes para o projeto de redução finitária, esses resultados estão formulados de modo abstrato, sem focar nas particularidades do sistema que representaria a matemática. Apenas contamos com a capacidade de nomear as próprias frases sem deixar a linguagem, de representar a diagonalização e de produzir uma fórmula de dedutibilidade no sistema. Esse caminho permite apresentar demonstrações completas e diretas, exibindo o núcleo das demonstrações de Gödel dos teoremas da incompletude, que é simples. Encontramos aí uma junção das noções de dedução e definição, articuladas no teorema de Gödel-Tarski e no segundo teorema de Gödel, que, talvez mais do de qualquer outro resultado, aponta para um componente do pensamento matemático que se distingue da atividade de definir e demonstrar dentro de uma representação simbólica da matemática. Trata-se do componente responsável por julgar tais representações com relação à conformidade com suas próprias pretensões. A obtenção desses teoremas compromete seriamente o projeto de redução finitária da matemática de mais de um modo, ponto que não é discutido neste texto.

Os dois capítulos finais contém métodos e resultados básicos acerca dos problemas da definibilidade de predicados e da construção de modelos. O infinito está presente nessa parte desde o início, a partir da noção de estrutura, mas mesmo aqui um esforço foi feito em direção à construtividade. No primeiro desses dois capítulos finais encontramos o método de Henkin de construção de modelos, o que fornece outra caracterização das sentenças dedutíveis. O objetivo do último capítulo é o de apresentar uma caracterização dos predicados definíveis dada em termos da estratificação da equivalência elementar introduzida por Fraïssé e fecha a análise infinitária da lógica de primeira ordem apresentada neste livro. Tal análise tem o papel de instruir nossos juízos acerca do que pode ser capturado por uma descrição formal.

Dois apêndices completam o corpo do texto com material adicional. Trata-se de conteúdo indispensável para ilustrar o papel da lógica nos estudos fundacionais, mas a inclusão desse material entre os capítulos não favoreceria a intenção de ir direto ao ponto das teorias da dedução e da definição com a qual o texto foi escrito. Resultados básicos sobre fórmulas e uma apresentação da teoria de Zermelo-Fraenkel (ZF) com uma amostra de seu desenvolvimento formal estão incluídos na condição de apêndice.

Algumas simplificações foram adotadas para colocar em relevo as ideias básicas, sendo que detalhes laterais podem ser adaptados. Em primeiro lugar, não consideramos símbolos para funções. Em segundo lugar, quando lidamos com o infinito, lidamos apenas com o caso enumerável. Não há grande perda de generalidade em nenhuma das duas suposições e, além de favorecer o foco nas ideias básicas e a eficiência, elas permitem desenvolver a parte em que o infinito está presente - os dois capítulos finais - de modo mais construtivo.

Todas as seções do livro incluem um exercício ao final que tem por finalidade auxiliar a apreensão do conteúdo. Um grande esforço foi feito para evitar notação rebuscada, tão comum em alguns textos de lógica, e para explicar as ideias básicas sem fazer parecer mais difíceis que são. A sequência de resultados foi pensada para alcançar eficiência e clareza nas demonstrações, obtidas por concatenações das ideias básicas colocadas em relevo. Ao mesmo tempo, essa sequência mostra a conexão do caminho percorrido que parte da análise finitária da noção de dedução, constituindo a teoria geral da dedução, passa pela indefinibilidade e a impossibilidade de demonstrar finitariamente, em geral, a consistência dessa mesma noção, o que aponta sérias dificuldades para o projeto de redução finitária, e segue para os métodos modelo-teóricos de análise da definibilidade e da dedutibilidade. Dito isso sobre a organização e apresentação do conteúdo, grande parte do que é feito neste livro já se encontra, com variações normais, na literatura. Apenas a noção de valor de primeira ordem com seu emprego na análise de tipos, e a concepção segundo a qual na base de ZF está um conceito caracterizado por uma lista princípios diretivos, não um universo de objetos particulares que seriam descritos pela teoria, podem ser atribuídas ao autor.

O livro de Boolos, Burgess e Jeffrey, *Computabilidade e Lógica*, traduzido para o português e com muito pouca sobreposição com este, é indicado para estudo complementar. Quase tudo que se encontra aqui nos três primeiros capítulos está no clássico *Mathematical Logic*, de Shoenfield, e a comparação entre os textos é instrutiva porque soluções distintas são apresentadas para os mesmos problemas. A única exceção notável é o teorema fundamental da teoria das deduções, que aparece no livro *First-Order Logic*, de Smullyan, com outra abordagem. O teorema de Gödel-Tarski encontra-se apresentado praticamente do mesmo modo na monografia de Tarski, Mostowski e Robinson, *Undecidable Theories*. Boolos, Burgess e Jeffrey apresentam a formulação abstrata do segundo teorema de Gödel que damos aqui. O livro *Cours de Théorie des Modèles*, de Poizat, contém uma exposição do teorema de Fraïssé e muito mais. O teorema fundamental da teoria das definições é dado por Fraïssé no seu *Cours de Logique Mathématique*, *tome 2*, bem no início, baseado em material desenvolvido no respectivo *tome 1*. O teorema da completude via método de Henkin é também exposto por Shoenfield. O apêndice sobre fórmulas adota escolhas muito similares àquelas encontradas no já mencionado *Computabilidade e Lógica*. Um desenvolvimento formal da teoria de conjuntos muito mais completo é dado por Bourbaki, em *Théorie des Ensembles*, onde os axiomas de Zermelo-Fraenkel são adicionados ao cálculo epsilon como sistema de base. Os teoremas epsilon se referem, originalmente, a esse cálculo, o que explica a razão pela qual são assim chamados. É importante observar que no caso da teoria de conjuntos apresentada por Bourbaki a ocorrência irrestrita do símbolo epsilon nas fórmulas dos axiomas esquema é permitida. Portanto, o segundo teorema epsilon não se aplica para garantir a conservatividade sobre ZF, que adota a lógica de primeira ordem como sistema de base. Esta é uma lista muito pessoal de livros, fortemente recomendada.

A proposta deste livro, dirigida, sobretudo, a estudantes e pesquisadores com interesse principal em lógica, é a de constituir um material básico de estudo sistematicamente articulado, não um amontoado errático de conteúdos sem um princípio organizador. Há aqui uma exposição de importantes módulos de raciocínio acerca de dois temas lógicos centrais - o tema da dedução e o tema da definição - a partir de uma perspectiva fundacional sobre o pensamento matemático. Foram incluídos apenas conteúdos diretamente relevantes para esses temas. O livro foi projetado para desenvolver competências indispensáveis à medida em que é percorrido sistematicamente do início ao fim, não para ser usado como referência ocasional de definições e teoremas. O corpo do texto é autocontido, não há citações nas páginas seguintes, não assumimos competências matemáticas especializadas e buscamos sempre o modo mais simples e construtivo para veicular os pontos principais na íntegra. O objetivo é fornecer bases sólidas para estudos mais avançados na mesma direção.

Agradeço a Alexandre, Edgar, Gustavo e Luiza pelas contribuições ao projeto de produzir e publicar este livro. Boa leitura.

CAPíTULO 1

Tautologias

1. Um Sistema Dedutivo para a Lógica Proposicional

Consideramos a linguagem para a lógica proposicional clássica formada a partir de símbolos para negação ($\neg$), para disjunção ($\vee$), para as proposições atômicas (L, L', L'', ...) e parênteses ((,)) usados para efeito de desambiguação. Fórmulas podem ser definidas de modo usual, como sequências finitas de símbolos geradas de modo apropriado. Usamos as letras A, B, C, D, E, F, G, H e I para representar fórmulas quaisquer. Eliminamos parênteses com convenções já bem estabelecidas.

Todas as operações verofuncionais representadas por tabelas de verdade podem ser expressas por fórmulas dessa linguagem por métodos conhecidos. É bom ter em mente que $\neg A \vee B$ expressa a implicação de A para B, e é abreviada por $A \to B$, e que $\neg(\neg A \vee \neg B)$ expressa a conjunção de A e B, e é abreviada por $A \wedge B$.

Vamos estabelecer um sistema dedutivo a partir de um axioma e quatro regras, tudo entendido como esquema:

- Axioma do terceiro excluído (com negação à esquerda): $\neg A \vee A$.
- Regra da expansão (à esquerda): $\dfrac{A}{B \vee A}$
- Regra da contração: $\dfrac{A \vee A}{A}$
- Regra da associatividade (para a esquerda): $\dfrac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$
- Regra do corte (à esquerda): $\dfrac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{B \vee C}$

Uma dedução de uma conclusão a partir de zero ou mais premissas é uma sequência de fórmulas em que cada elemento da sequência é uma premissa, ou um axioma, ou obtida a partir de um ou dois elementos anteriores pela aplicação de uma regra, e tal que o último elemento é a conclusão.

O método de deduções é tal que as premissas não precisam ser apresentadas todas no início pois elas são utilizadas uma de cada vez ao longo da sequência dedutiva.

O método é, também, de cárater composicional, e é de fácil comunicação: Deduções podem ser compostas para formar uma nova dedução, o que implica que deduções já feitas podem ser usadas como *macros*, abreviando as deduções seguintes. Esse aspecto será muito explorado nas próximas seções. Essas características fazem com que o método seja de particular interesse, sobretudo no contexto da lógica de predicados.

1. Exercício. Mostre que as regras do sistema dedutivo preservam verdade. Ou seja, mostre que sempre que as premissas da regra do corte são verdadeiras a conclusão também é, e sempre que a premissa das outras três regras é verdadeira, a conclusão também é.

2. Primeiros Exemplos

Nos exemplos de dedução a seguir escrevemos entre parênteses, de modo resumido e ao lado de cada termo da sequência, a cláusula a partir da qual ele foi obtido. É importante identificar os termos correspondentes às premissas e à conclusão do argumento deduzido. Cada premissa do argumento é descrita como tal entre parênteses, e a conclusão é sempre o último termo.

Essa escrita ilustra como as deduções são de fácil comunicação. Nos casos em que um termo da sequência é obtido pela aplicação da regra do corte, escrevemos ao lado desse termo os números correpondentes às premissas dessa regra, sendo que o número da primeira premissa aparece primeiro.

2. Exemplo. [Regra da inversão]

(1) $A \lor B$ (premissa)
(2) $\neg A \lor A$ (axioma)
(3) $B \lor A$ (corte em 1, 2)

3. Exemplo. [Regra da associatividade para a direita]

(1) $(A \lor B) \lor C$ (premissa)
(2) $C \lor (A \lor B)$ (inversão)
(3) $(C \lor A) \lor B$ (associatividade)
(4) $B \lor (C \lor A)$ (inversão)
(5) $(B \lor C) \lor A$ (associatividade)
(6) $A \lor (B \lor C)$ (inversão)

As regras da inversão e da associatividade para a direita mostram que a assimetria na "formulação esquerda" que demos para o sistema dedutivo não é um problema. A partir de agora, escrevemos 'associatividade' tanto para indicar o uso da regra esquerda, quanto para indicar o uso da regra direita. Similarmente para 'axioma' e 'expansão'. Para maior clareza, a regra do corte será usada apenas em sua formulação original.

4. Exemplo. [Regra da eliminação da dupla negação]
(1) $\neg\neg A \vee B$ (premissa)
(2) $\neg A \vee A$ (axioma)
(3) $A \vee B$ (corte em 2, 1)

5. Exemplo. [Regra da introdução da dupla negação]
(1) $A \vee B$ (premissa)
(2) $\neg A \vee \neg\neg A$ (axioma)
(3) $B \vee \neg\neg A$ (corte em 1, 2)
(4) $\neg\neg A \vee B$ (inversão)

A partir de agora escrevemos 'dupla negação' para indicar o uso de qualquer uma das duas regras derivadas acima.

6. Exemplo. [Regra de *modus ponens*]
(1) A (primeira premissa)
(2) $A \vee B$ (expansão)
(3) $\neg A \vee B$ (segunda premissa)
(4) $B \vee B$ (corte em 2, 3)
(5) B (contração)

7. Exercício. Deduza $\neg A \vee C$ a partir de $\neg(A \vee B) \vee C$. Deduza também $\neg B \vee C$ a partir da mesma premissa.

3. Mais Exemplos

Apresentamos aqui mais exemplos de deduções. Além de ilustrativos, esses exemplos desempenham papel central nas demonstrações dos lemas contidos na seção seguinte.

Começamos com a regra da expansão (à esquerda) da segunda componente, pela qual $A \vee (C \vee B)$ é obtida a partir de $A \vee B$. Em seguida, consideramos a regra da contração na disjunção secundária, segundo a qual podemos inferir $A \vee B$ de $A \vee (B \vee B)$.

Outras regras de expansão da segunda componente e contração da disjunção secundária podem ser formuladas e facilmente deduzidas usando aquelas que estão deduzidas a seguir. Por exemplo, a regra que conclui $(A \vee C) \vee B$ a partir de $A \vee B$ é obtida da regra da expansão da segunda componente pela aplicação da associatividade. A regra que conclui $(C \vee A) \vee B$ a partir de $A \vee B$ é obtida pela expansão usual seguida de associatividade. Já a regra que conclui $A \vee B$ a partir de $(A \vee A) \vee B$ é obtida da regra da contração da disjunção secundária por duas inversões (da premissa e da conclusão).

8. Exemplo. [Regra da expansão da segunda componente]

(1) $A \vee B$ (premissa)
(2) $B \vee A$ (inversão)
(3) $C \vee (B \vee A)$ (expansão)
(4) $(C \vee B) \vee A$ (associatividade)
(5) $A \vee (C \vee B)$ (inversão)

9. Exemplo. [Regra da contração da disjunção secundária]

(1) $A \vee (B \vee B)$ (premissa)
(2) $(A \vee B) \vee B$ (associatividade)
(3) $B \vee (A \vee B)$ (inversão)
(4) $A \vee (B \vee (A \vee B))$ (expansão)
(5) $(A \vee B) \vee (A \vee B)$ (associatividade)
(6) $A \vee B$ (contração)

Passamos agora para a regra da associatividade da disjunção secundária (para a esquerda), segundo a qual podemos passar de $A \vee (B \vee (C \vee D))$ para $A \vee ((B \vee C) \vee D)$. Em seguida nos preocupamos com a regra do corte das disjunções secundárias. Para cada uma das três regras a seguir a dedução correspondente é bem mais complexa que todas aquelas mostradas nos exemplos anteriores, e é bom ter em mente quais são as passagens principais da dedução. No primeiro caso, podemos dizer que a passagem central é o uso corte para concluir a oitava fórmula da sequência.

10. Exemplo. [Regra da associatividade da disjunção secundária]

(1) $A \vee (B \vee (C \vee D))$ (premissa)
(2) $(A \vee B) \vee (C \vee D)$ (associatividade)
(3) $\neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$ (axioma)
(4) $(\neg(A \vee B) \vee A) \vee B$ (associatividade)
(5) $((\neg(A \vee B) \vee A) \vee B) \vee C$ (expansão)
(6) $(\neg(A \vee B) \vee A) \vee (B \vee C)$ (associatividade)
(7) $\neg(A \vee B) \vee (A \vee (B \vee C))$ (associatividade)
(8) $(C \vee D) \vee (A \vee (B \vee C))$ (corte em 2, 7)
(9) $C \vee (D \vee (A \vee (B \vee C)))$ (associatividade)
(10) $B \vee (C \vee (D \vee (A \vee (B \vee C))))$ (expansão)
(11) $(B \vee C) \vee (D \vee (A \vee (B \vee C)))$ (associatividade)
(12) $A \vee ((B \vee C) \vee (D \vee (A \vee (B \vee C))))$ (expansão)
(13) $(A \vee (B \vee C)) \vee (D \vee (A \vee (B \vee C)))$ (associatividade)
(14) $D \vee ((A \vee (B \vee C)) \vee (D \vee (A \vee (B \vee C))))$ (expansão)
(15) $(D \vee (A \vee (B \vee C))) \vee (D \vee (A \vee (B \vee C)))$ (associatividade)
(16) $D \vee (A \vee (B \vee C))$ (contração)
(17) $(A \vee (B \vee C)) \vee D$ (inversão)
(18) $A \vee ((B \vee C) \vee D)$ (associatividade)

Agora a regra que conclui $A \vee (C \vee D)$ a partir das premissas $A \vee (B \vee C)$ e $A \vee (\neg B \vee D)$.

11. Exemplo. [Regra do corte das disjunções secundárias]

(1) $A \vee (B \vee C)$ (primeira premissa)
(2) $D \vee (A \vee (B \vee C))$ (expansão)
(3) $(D \vee A) \vee (B \vee C)$ (associatividade)
(4) $(B \vee C) \vee (D \vee A)$ (inversão)
(5) $B \vee (C \vee (D \vee A))$ (associatividade)
(6) $B \vee ((C \vee D) \vee A)$ (associatividade secundária)
(7) $A \vee (\neg B \vee D)$ (segunda premissa)
(8) $(A \vee \neg B) \vee D$ (associatividade)
(9) $D \vee (A \vee \neg B)$ (inversão)
(10) $C \vee (D \vee (A \vee \neg B))$ (expansão)
(11) $(C \vee D) \vee (A \vee \neg B)$ (associatividade)
(12) $((C \vee D) \vee A) \vee \neg B$ (associatividade)
(13) $\neg B \vee ((C \vee D) \vee A)$ (inversão)
(14) $((C \vee D) \vee A) \vee ((C \vee D) \vee A)$ (corte em 6, 13)
(15) $(C \vee D) \vee A$ (contração)
(16) $A \vee (C \vee D)$ (inversão)

Fechamos esta seção com a regra da prova por casos, segundo a qual $\neg(A \vee B) \vee C$ pode ser deduzida a partir de $\neg A \vee C$ e $\neg B \vee C$.

12. Exemplo. [Regra da prova por casos]

(1) $\neg A \vee C$ (primeira premissa)
(2) $\neg B \vee C$ (segunda premissa)
(3) $\neg(A \vee B) \vee (A \vee B)$ (axioma)
(4) $(\neg(A \vee B) \vee A) \vee B$ (associatividade)
(5) $B \vee (\neg(A \vee B) \vee A)$ (inversão)
(6) $(\neg(A \vee B) \vee A) \vee C$ (corte em 5, 2)
(7) $C \vee (\neg(A \vee B) \vee A)$ (inversão)
(8) $(C \vee \neg(A \vee B)) \vee A$ (associatividade)
(9) $A \vee (C \vee \neg(A \vee B))$ (inversão)
(10) $(C \vee \neg(A \vee B)) \vee C$ (corte em 9, 1)
(11) $((C \vee \neg(A \vee B)) \vee C) \vee \neg(A \vee B)$ (expansão)
(12) $(C \vee \neg(A \vee B)) \vee (C \vee \neg(A \vee B))$ (associatividade)
(13) $C \vee \neg(A \vee B)$ (contração)
(14) $\neg(A \vee B) \vee C$ (inversão)

13. Exercício. Formule e deduza as regras da inversão da disjunção secundária e da associatividade da disjunção secundária para a direita.

4. Alguns Resultados Úteis Para Deduzir Consequências Válidas

14. Lema. [Teorema da dedução]
Sejam A e B fórmulas. Há uma dedução da conclusão B a partir da premissa A se e somente se há uma dedução de $\neg A \vee B$ sem premissas.

Demonstração. Para demonstrar a volta, basta compor uma dedução da fórmula $\neg A \vee B$ com a premissa A e a regra de *modus ponens* para obter uma dedução de B a partir de A.

Para a ida, de uma dedução de B a partir de A, denotada por d, vamos construir uma dedução de $\neg A \vee B$ sem premissas. A construção é feita por indução no comprimento de d.

Passo base:

Se d tem comprimento 1, então B é a premissa A ou B é um axioma. No primeiro caso, $\neg A \vee B$ é um axioma, e é uma dedução de si mesma. No segundo caso, em que B é um axioma, temos a seguinte dedução de $\neg A \vee B$:

(1) B (axioma)
(2) $\neg A \vee B$ (expansão)

Passo indutivo:

Podemos supor que B não é a premissa A e também não é um axioma. Então B é obtida ao final da dedução d pela aplicação de uma das quatro regras primitivas do sistema dedutivo.

Primeiro caso: B é obtida a partir de C por expansão, B é a fórmula $D \vee C$, para alguma fórmula D. A subsequência de d que termina em C é uma dedução cujo comprimento é menor que o comprimento de d. Por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg A \vee C$. Agora, uma dedução de $\neg A \vee B$ pode ser obtida a partir dessa dedução de $\neg A \vee C$ pela regra da expansão da segunda componente.

Segundo caso: B é obtida a partir de C por contração, C é $B \vee B$. Por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg A \vee C$. Uma dedução de $\neg A \vee B$ pode ser obtida a partir dessa dedução de $\neg A \vee (B \vee B)$ pela regra da contração da disjunção secundária.

Terceiro caso: B é obtida a partir de C por associatividade, B é a fórmula $(D \vee E) \vee F$ e C é a fórmula $D \vee (E \vee F)$. Por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg A \vee C$. Uma dedução de $\neg A \vee B$ pode ser obtida a partir dessa dedução de $\neg A \vee (D \vee (E \vee F))$ pela regra da associatividade da disjunção secundária.

Quarto caso: B é obtida a partir de C e D por corte, B é a fórmula $F \vee G$, C é a fórmula $E \vee F$ e D é a fórmula $\neg E \vee G$. Por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg A \vee (E \vee F)$, e uma dedução de $\neg A \vee (\neg E \vee G)$. Uma dedução de $\neg A \vee (F \vee G)$ pode ser obtida a partir dessas duas deduções pela regra do corte das disjunções secundárias. □

Seja A uma fórmula. Definimos as disjuntas primas de A do seguinte modo: Se A não é uma disjunção, então A é a única disjunta prima de A. Se A é uma disjunção da forma $B \vee C$, então uma fórmula é disjunta prima de A se e somente se é disjunta prima de B ou é disjunta prima de C.

15. OBSERVAÇÃO. Cada fórmula possui ao menos uma disjunta prima, o que é facilmente demonstrado por indução na complexidade da fórmula dada. Uma disjunção nunca é disjunta prima de outra fórmula.

16. LEMA. [Regra das disjuntas primas]
Sejam A e B fórmulas. Se toda disjunta prima de A é também disjunta prima de B, então há uma dedução da conclusão B a partir da premissa A.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos demonstrar o lema por indução no número de ocorrências de disjuntas primas de A (cada ocorrência de uma disjunta prima é contada separadamente; por exemplo se A é $\neg B \vee \neg B$, a disjunta prima $\neg B$ é contada duas vezes).

Passo base:

Se há apenas uma ocorrência de disjunta prima em A, então A não é uma disjunção e sua única disjunta prima é ela própria. Por hipótese, A é uma disjunta prima de B.

Vamos demonstrar por indução na complexidade de B que se A é uma disjunta prima de B então há uma dedução da conclusão B a partir da premissa A.

Se B não for uma disjunção, então sua única disjunta prima é ela própria e A é B. Nesse caso, há uma dedução trivial de uma linha de B a partir de A.

Vamos supor que B é uma disjunção, $C \vee D$. Por hipótese, A é disjunta prima de C ou A é disjunta prima de D. Por hipótese de indução, há uma dedução de C a partir de A ou há uma dedução de D a partir de A. Em qualquer caso, obtemos uma dedução de B a partir de A por uma expansão apropriada. Isso encerra o passo base.

Passo indutivo:

Se A possui mais de uma ocorrência de uma disjunta prima, então A é uma disjunção, $C \vee D$. Qualquer ocorrência de disjunta prima em C é uma ocorrência dessa mesma disjunta prima em A, o mesmo vale para D. Sabemos que C e D possuem ao menos uma disjunta prima cada. Portanto, o número de ocorrências de disjuntas primas em C é estritamente menor que o número de ocorrências de disjuntas primas em A, e igualmente para D.

Como toda disjunta prima de A é disjunta prima de B, temos que toda disjunta prima de C é disjunta prima de B, e toda disjunta prima de D é disjunta prima de B. Por hipótese de indução, há uma dedução de B a partir de C, e há uma dedução de B a partir de D.

Pelo teorema da dedução, há deduções de $\neg C \vee B$ e de $\neg D \vee B$. A composição dessas deduções, seguida de uma aplicação da regra da prova por casos, é uma dedução de $\neg A \vee B$. Pela dedução de $\neg A \vee B$ obtida, chegamos a uma dedução de B a partir de A usando a premissa A e a regra de modus ponens. $\square$

17. Exercício. Demonstre que se A, B, C, D e E são fórmulas distintas, e nenhuma delas é uma disjunção, então as disjuntas primas de $A\vee(B\vee(C\vee(D\vee E)))$ são A, B, C, D e E. Enuncie e demonstre por indução o resultado correspondente para um número qualquer de fórmulas dadas.

5. Toda Tautologia é Dedutível

Vamos mostrar como usar os resultados obtidos para construir, a partir de uma fórmula A, uma sequência de fórmulas que é uma dedução de A desde que A seja tautologia. Uma tautologia é uma fórmula que é satisfeita, segundo as regras usuais para a determinação do valor de verdade de negações e disjunções, em qualquer atribuição de valor de verdade para as fórmulas atômicas. Antes disso, precisamos de um lema sobre tautologias:

18. Lema. *Se A é uma fórmula tal que toda disjunta prima de A é atômica ou negação de atômica, e não há uma fórmula atômica tal que ela própria e sua negação são ambas disjuntas primas de A, então A não é uma tautologia.*

Demonstração. Vamos demonstrar os dois fatos seguintes, a partir dos quais o resultado é obtido.

(i) Se uma atribuição de valor de verdade para as sentenças atômicas atribui falso para as sentenças atômicas que ocorrem como disjuntas primas em A e verdadeiro para as sentenças atômicas cujas negações ocorrem como disjuntas primas em A, então essa atribuição não satisfaz A.

(ii) Se A é uma fórmula que satisfaz as hipóteses do lema, então há uma atribuição de valor de verdade para as sentenças atômicas que satisfaz o antecedente de (i).

Para demonstrar (ii), definimos uma atribuição estipulando que uma sentença atômica é verdadeira se e somente se não ocorre como disjunta prima em A. Como não há uma fórmula atômica tal que ela própria e sua negação são ambas disjuntas primas de A, essa atribuição satisfaz o antecedente de (i).

A demonstração de (i) pode ser feita por indução no número de ocorrências de disjuntas primas em A como segue.

Passo base:

Se há apenas uma ocorrência de disjunta prima em A, então A não é uma disjunção e sua única disjunta prima é ela própria. Nesse caso, A é atômica ou negação de atômica. O fato (i) é óbvio nesse caso.

Passo indutivo:

Se há mais de uma ocorrência de disjunta prima em A, então A é uma disjunção, $B \vee C$. Uma atribuição qualquer que satisfaz o antecedente de (i) para A, também o satisfaz para B e para C. Por hipótese de indução, B e C não são satisfeitas por essa atribuição. Como A é $B \vee C$, temos que A não é satisfeita por essa atribuição.

O fato (i) está assim estabelecido por indução, e a demonstração do lema está completa. □

19. Observação. Se cada disjunta prima de uma tautologia é atômica ou negação de atômica, então há entre suas disjuntas primas uma fórmula e sua negação.

20. Teorema. [Teorema das tautologias]
Se uma fórmula A é uma tautologia então há uma dedução de A.

Demonstração. O resultado será demonstrado por indução na soma dos comprimentos das ocorrências de disjuntas primas em A.

Passo base:

Se a soma dos comprimentos das ocorrências de disjuntas primas em A é igual a 1, então A é atômica e não é tautologia.

Passo indutivo:

Se dentre as disjuntas primas de A há uma fórmula B e sua negação, então, pela regra das disjuntas primas, há uma dedução de A a partir de $\neg B \vee B$. Como $\neg B \vee B$ é um axioma, essa dedução é uma dedução de A.

Seja A uma fórmula complexa que é tautologia, e assuma a hipótese de indução. Pelo parágrafo anterior, basta mostrar que há uma dedução de A assumindo que não há uma fórmula e sua negação entre as suas disjuntas primas.

Se não há uma fórmula e sua negação entre as disjuntas primas de A, então, pelo lema precedente, há uma disjunta prima de A que não é atômica nem negação de atômica. Seja B uma disjunta prima de A que não é atômica nem negação de atômica. Sabemos que B também não é uma disjunção, pois nenhuma disjunção é disjunta prima de outra fórmula. Ficamos com dois casos apenas:

(i) Se B é $\neg\neg C$, então A e $\neg\neg C \vee D$ possuem as mesmas disjuntas primas, sendo que D é uma fórmula que tem uma ocorrência de cada disjunta prima de A diferente de B. Para fixar as ideias, podemos estipular que D é obtida pela disjunção iterada associada pela direita das disjuntas primas de A diferentes de B, na ordem em que elas ocorrem em A. Pela regra das disjuntas primas, há uma dedução de A a partir de $\neg\neg C \vee D$ e vice-versa. Em particular, $\neg\neg C \vee D$ é uma tautologia. Desse modo, $C \vee D$ é também uma tautologia e a soma dos comprimentos das ocorrências de disjuntas primas em $C \vee D$ é estritamente menor que a soma correspondente para A. Por hipótese de indução, há uma dedução de $C \vee D$. Essa dedução pode ser convertida em uma dedução de A pela aplicação da regra da introdução da dupla negação, seguida da aplicação regra das disjuntas primas.

(ii) Se B é $\neg(C \vee D)$, então A e $\neg(C \vee D) \vee E$ possuem as mesmas disjuntas primas, onde E é uma fórmula que tem uma ocorrência de cada disjunta prima de A diferente de B. Pela regra das disjuntas primas, há uma dedução de A a partir de $\neg(C \vee D) \vee E$ e vice-versa. Em particular, $\neg(C \vee D) \vee E$ é uma tautologia. Desse modo, $\neg C \vee E$ e $\neg D \vee E$ são tautologias cujas somas dos comprimentos das ocorrências de disjuntas primas são estritamente menores que a soma correspondente para A. Por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg C \vee E$ e há uma dedução de

$\neg D \vee E$. Essas deduções podem ser convertidas em uma dedução de A pela aplicação da regra da prova por casos, seguida da aplicação regra das disjuntas primas. $\square$

21. Exemplo. Seguindo a demonstração do teorema das tautologias, vamos deduzir a tautologia

$$(\neg L \vee \neg(L' \vee L'')) \vee (\neg\neg L' \vee L'').$$

Primeiro, observamos que as disjuntas primas da tautologia acima são as fórmulas $\neg L$, $\neg(L' \vee L'')$, $\neg\neg L'$ e L''. Pela regra das disjuntas primas, bastaria deduzir

$$\neg\neg L' \vee (\neg(L' \vee L'') \vee (\neg L \vee L'')).$$

Pela regra da introdução da dupla negação, bastaria deduzir

$$L' \vee (\neg(L' \vee L'') \vee (\neg L \vee L'')).$$

Pela regra das disjuntas primas, bastaria deduzir

$$\neg(L' \vee L'') \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L'))).$$

Pela regra da prova por casos, bastaria deduzir ambas

$$\neg L' \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L')))$$

e

$$\neg L'' \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L'))).$$

Mas, usando a regra das disjuntas primas, a primeira dessas fórmulas é dedutível a partir do axioma $\neg L' \vee L'$, e a segunda é dedutível a partir do axioma $\neg L'' \vee L''$.

Explicitamente,

(1) $\neg L' \vee L'$ (axioma)
(2) $\neg L' \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L')))$ (regra das disjuntas primas)
(3) $\neg L'' \vee L''$ (axioma)
(4) $\neg L'' \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L')))$ (regra das disjuntas primas)
(5) $\neg(L' \vee L'') \vee ((\neg L \vee (L'' \vee L')))$ (regra da prova por casos em 2 e 4)
(6) $L' \vee (\neg(L' \vee L'') \vee (\neg L \vee L''))$ (regra das disjuntas primas)
(7) $\neg\neg L' \vee (\neg(L' \vee L'') \vee (\neg L \vee L''))$ (introdução da dupla negação)
(8) $(\neg L \vee \neg(L' \vee L'')) \vee (\neg\neg L' \vee L'')$ (regra das disjuntas primas)

é uma dedução da fórmula inicial.

22. Exercício. Seguindo a demonstração do teorema das tautologias, construa uma dedução para a seguinte tautologia:

$$(\neg\neg(L''' \vee (\neg L' \vee L'')) \vee L) \vee (\neg(\neg L' \vee L''') \vee L'')$$

CAPíTULO 2

Transição para a Lógica de Primeira Ordem

1. Predicação e Quantificação

Estendemos a linguagem da lógica proposicional clássica com pronomes (i, j, k, i', ...), nomes próprios (f, g, h, f', ...), um símbolo para quantificação existencial ($\exists$) e consideramos agora símbolos tanto para proposições atômicas quanto para predicados de aridade maior que zero (L, M, N, O, L', ...). Dizemos que símbolos para proposições atômicas são símbolos de predicado de aridade zero, e nos referimos coletivamente aos símbolos para proposições atômicas e para predicados de aridade maior que zero como símbolos de predicado, simplesmente. Novamente, fórmulas podem ser definidas de modo usual, como sequências finitas de símbolos geradas de modo apropriado, e são representadas pelas letras maiúsculas do início do alfabeto. Também usamos letras com distintivos, A', B', por exemplo, para representar fórmulas. Símbolos de predicado são representados por P, Q e R. Pronomes e nomes próprios são coletivamente chamados de nomes. Usamos t, u e v para representar nomes quaisquer, enquanto usamos x, y, z e w para representar pronomes quaisquer apenas. Índices numéricos subscritos são usados algumas vezes. Qualquer outra notação utilizada é explicada.

As noções de ocorrência ligada e ocorrência livre de um pronome em uma fórmula pode ser definida normalmente, assim como a noção de substituição de nomes por pronomes. A notação $A_{x,y,...}[t, u, ...]$ é usada para indicar a substituição simultânea das ocorrências livres de x, y, ... por t, u, ..., respectivamente, apenas nos casos em que x, y, ... representam pronomes distintos entre si e que a substituição de um pronome por outro não resulta em uma ocorrência ligada do segundo.

Uma fórmula fechada é uma fórmula sem ocorrências livres de pronomes. Fórmulas fechadas são também chamadas de sentenças. Uma fórmula aberta é uma fórmula sem ocorrências ligadas de pronomes, ou seja, sem ocorrências de quantificadores.

Não exigimos que nossos estoques de nomes próprios e símbolos de predicado sejam esgotados na definição das fórmulas. Ao contrário, sempre assumimos que nomes próprios e símbolos de predicado, ilimitados em quantidade, não foram usados e estão disponíveis para serem introduzidos como símbolos ainda não utilizados. Claro que isso pode ser facilmente arranjado na definição das fórmulas. Em cada fórmula há apenas uma quantidade finita de ocorrências de símbolos. Chamamos de linguagem da fórmula A o estoque finito de símbolos que ocorrem em A. Tudo o que precisamos sobre fórmulas encontra-se no apêndice A.

Adicionamos ao sistema dedutivo do capítulo anterior um axioma e uma regra. Na representação abaixo o axioma e a regra devem ser entendidos como esquemas em que x representa um pronome qualquer, A representa uma fórmula qualquer e B representa uma fórmula qualquer em que x não ocorre livre. Além disso adotamos um símbolo para a implicação ($\rightarrow$), que deve ser entendido como abreviação. Do mesmo modo, adotamos um símbolo para a quantificação universal ($\forall$), que também deve ser entendido como abreviação: $\forall xA$ é a abreviação de $\neg\exists x\neg A$ e uma fórmula desse tipo é chamada universal.

- Axioma da substituição: $A_x[t] \rightarrow \exists xA$
- Regra da introdução do existencial: $\dfrac{A \rightarrow B}{\exists xA \rightarrow B}$
  (x não ocorre livre em B).

A noção de dedução é definida como antes: Uma dedução de uma conclusão a partir de zero ou mais premissas é uma sequência de fórmulas em que cada elemento da sequência é uma premissa, ou um axioma, ou obtida a partir de um ou dois elementos anteriores pela aplicação de uma regra, e tal que o último elemento é a conclusão. Podemos definir, também, a noção de tautologia na presença de predicados e quantificação: Uma tautologia é uma fórmula que é satisfeita em qualquer atribuição de valor de verdade para as fórmulas atômicas e existenciais.

O teorema das tautologias, demonstrado na seção anterior, pode ser usado para concluir, por exemplo, que se E é consequência tautológica de A, B C e D, então há uma dedução de E a partir de A, B C e D. De fato, suponhamos que E é consequência tautológica de A, B C e D, ou seja, que $\neg A \vee (\neg B \vee (\neg C \vee (\neg D \vee E)))$ é uma tautologia, ou, equivalentemente, que $(A \wedge (B \wedge (C \wedge D))) \rightarrow E$ é uma tautologia. A composição de uma dedução de $\neg A \vee (\neg B \vee (\neg C \vee (\neg D \vee E)))$ (dada pelo teorema das tautologias) com uma aplicação de modus ponens para cada uma das quatro premissas na ordem apropriada constitui uma dedução de E a partir de A, B, C e D. Em última análise, a dedução obtida desse modo usa apenas o axioma do terceiro excluído e as regras de expansão, contração, associatividade e corte. Claro que isso pode ser generalizado para qualquer número de premissas.

Acabamos de ver que qualquer caso de consequência tautológica pode ser usado como *macro* em uma dedução. Por outro lado, como o axioma do terceiro excluído é uma tautologia e regras de expansão, contração, associatividade e corte são casos de consequência tautológica, cada fórmula que ocorre em uma dedução sem o axioma da substituição e sem a regra da introdução do existencial é consequência tautológica das premissas.

Com isso, o sistema dedutivo que acabamos de apresentar pode ser resumido à combinação dessa cláusula geral da consequência tautológica com o axioma da substituição e a regra da introdução do existencial. A partir de agora vamos usar essa caraterização do sistema dedutivo e não vamos nos ocupar em deduzir uma conclusão a partir de premissas em número qualquer se a conclusão for consequência tautológica das premissas. Encerramos essa seção com uma observação relevante sobre consequência tautológica.

23. Observação. Suponha que E é consequência tautológica de A, B, C e D e que temos uma transformação de fórmulas que transforma A em A', B em B', C em C', D em D' e E em E'. Suponhamos ainda que a transformação dada preserva disjunções e negações, ou seja, que transforma fórmulas do tipo $F \vee G$ e $\neg F$ em $F' \vee G'$ e $\neg F'$, respectivamente, em que F' e G' são as transformadas de F e G. Nesse caso, E' é consequência tautológica de A', B', C' e D'. De fato, se σ é uma atribuição de valor de verdade para fórmulas atômicas e existenciais, então definimos uma atribuição τ do seguinte modo: Se F é atômica ou existencial, então τ atribui para F o mesmo valor de verdade que σ atribui para F'.

Agora, uma fórmula G qualquer é satisfeita em τ se e somente se G' é satisfeita em σ. Isso é demonstrado por indução no número de disjunções e negações de G. Se G é atômica ou existencial, então G é satisfeita em τ se e somente se G' é satisfeita em σ pela definição de τ. Se G é uma disjunção, $H \vee I$, então G é satisfeita em τ se e somente se pelo menos uma dentre H e I é satisfeita em τ. Por hipótese de indução, pelo menos uma de H e I é satisfeita em τ se e somente se pelo menos uma dentre H' e I' é satisfeita em σ, ou seja, se e somente se $H' \vee I'$ é satisfeita em σ. Mas $H' \vee I'$ é a transformada de $H \vee I$, por hipótese, e $H \vee I$ é G. De tudo isso temos que G é satisfeita em τ se e somente se G' (que é $H' \vee I'$) é satisfeita em σ. Se G é uma negação, $\neg H$, então G é satisfeita em τ se e somente se H não é satisfeita em τ. Por hipótese de indução, H não é satisfeita em τ se e somente se H' não é satisfeita em σ, ou seja, se e somente se $\neg H'$ é satisfeita em σ. Mas $\neg H'$ é a transformada de $\neg H$, por hipótese, e $\neg H$ é G. Temos que G é satisfeita em τ se e somente se G' (que é $\neg H'$) é satisfeita em σ.

Por hipótese, $\neg A \vee (\neg B \vee (\neg C \vee (\neg D \vee E)))$ é uma tautologia, e é satisfeita em τ, como consequência. A transformada dessa fórmula é

$$\neg A' \vee (\neg B' \vee (\neg C' \vee (\neg D' \vee E'))),$$

e é satisfeita em σ, pelo parágrafo anterior. Como σ é uma atribuição qualquer, concluímos que $\neg A' \vee (\neg B' \vee (\neg C' \vee (\neg D' \vee E')))$ é uma tautologia, ou seja, E' é consequência tautológica de A', B', C' e D', como queríamos. O resultado é claramente geral, válido para consequência tautológica a partir de qualquer número de fórmulas.

24. Exercício. Demonstre que cada fórmula que ocorre em uma dedução sem o axioma da substituição e sem a regra da introdução do existencial é consequência tautológica das premissas (por indução no comprimento da dedução). Dê um exemplo de fórmula do tipo $\exists x A$ que seja dedutível e apresente uma dedução da mesma.

2. Regras e Propriedades Básicas

Precisamos estabelecer regras básicas envolvendo as novas fórmulas e introduzir o quantificador universal. Além do teorema da substituição e da regra da introdução do universal, são de especial interesse imediato as regras de interação dos quantificadores com as outras operações lógicas, e a regra da generalização. Vamos começar com um teorema sobre a distributividade do quantificador existencial na disjunção.

25. Exemplo. [Regra da distributividade do existencial na disjunção]

(1) $A \to \exists x A$ (axioma da substituição)
(2) $B \to \exists x B$ (axioma da substituição)
(3) $(A \lor B) \to (\exists x A \lor \exists x B)$ (consequência tautológica de 1 e 2)
(4) $\exists x(A \lor B) \to (\exists x A \lor \exists x B)$ (introdução do existencial)
(5) $(A \lor B) \to \exists x(A \lor B)$ (axioma da substituição)
(6) $A \to (A \lor B)$ (tautologia)
(7) $A \to \exists x(A \lor B)$ (consequência tautológica de 5 e 6)
(8) $\exists x A \to \exists x(A \lor B)$ (introdução do existencial)
(9) $B \to (A \lor B)$ (tautologia)
(10) $B \to \exists x(A \lor B)$ (consequência tautológica de 5 e 9)
(11) $\exists x B \to \exists x(A \lor B)$ (introdução do existencial)
(12) $\exists x(A \lor B) \leftrightarrow (\exists x A \lor \exists x B)$ (consequência tautológica de 4, 8 e 11)

Propriedades e regras básicas da quantificação universal podem ser estabelecidas facilmente usando as propriedades e regras correlatas da quantificação existencial. Os primeiros exemplos disso são o teorema da substituição e a regra de introdução do universal.

26. Exemplo. [Teorema da substituição]

(1) $\neg A_x[t] \to \exists x \neg A$ (axioma da substituição)
(2) $\forall x A \to A_x[t]$ (consequência tautológica de 1 e definição de $\forall$)

Por instância de uma fórmula A entendemos uma fórmula obtida pela substituição uniforme de ocorrências livres de pronomes em A por nomes (quaisquer). Uma instância fechada de A é uma instância de A que é uma sentença.

No próximo exemplo supomos que x não ocorre livre em A. Trata-se de um exemplo relevante pois a regra da generalização é uma consequência direta dele.

27. Exemplo. [Regra da introdução do universal]

(1) $A \to B$ (premissa)
(2) $\neg B \to \neg A$ (consequência tautológica de 1)
(3) $\exists x \neg B \to \neg A$ (introdução do existencial)
(4) $A \to \forall x B$ (consequência tautológica de 3 e definição de $\forall$)

Não vamos continuar indicando que a abreviação $\forall x$ de $\neg\exists x\neg$ foi utilizada. Apesar de o quantificador universal ter sido definido a partir do existencial, na seção destinada às operações prenexas eles são tratados separadamente e com o mesmo status.

28. Exemplo. [Regra da generalização]

(1) A (premissa)
(2) $\neg\exists xA \vee \exists xA \to A$ (consequência tautológica de 1)
(3) $\neg\exists xA \vee \exists xA \to \forall xA$ (introdução do universal)
(4) $\forall xA$ (consequência tautológica de 3)

Segundo a regra da generalização, não é possível fazer uma afirmação particular usando pronomes. No sistema dedutivo apresentado, afirmar $P(x)$, por exemplo, é o mesmo que afirmar $\forall xP(x)$. Uma composição iterada da regra da generalização com o teorema da substituição e a regra de modus ponens pode ser usada para mostrar que qualquer instância de A pode ser deduzida a partir de A. Por exemplo, vamos deduzir $A_{x,y}[t,u]$ a partir de A.

Se t não representa o mesmo pronome que y, então obtemos $A_{x,y}[t,u]$ a partir de A por generalização em x, substituição ($\forall xA \to A_x[t]$), *modus ponens*, generalização em y, substituição ($\forall yA_x[t] \to A_x[t]_y[u]$) e *modus ponens*. Caso contrário, primeiro substituímos x e y por pronomes novos z e w que não ocorrem em A e obtemos $A_{x,y}[t,u]$ a partir de $A_{x,y}[z,w]$ por generalização em z, substituição, *modus ponens*, generalização em w, substituição e *modus ponens*.

Fechamos essa seção com as regras da distributividade dos quantificadores na implicação.

29. Exemplo. [Regra da distributividade do existencial na implicação]

(1) $A \to B$ (premissa)
(2) $B \to \exists xB$ (axioma da substituição)
(3) $A \to \exists xB$ (consequência tautológica de 1 e 2)
(4) $\exists xA \to \exists xB$ (introdução do existencial)

30. Exemplo. [Regra da distributividade do universal na implicação]

(1) $A \to B$ (premissa)
(2) $\forall xA \to A$ (teorema da substituição)
(3) $\forall xA \to B$ (consequência tautológica de 1 e 2)
(4) $\forall xA \to \forall xB$ (introdução do universal)

31. Exercício. Deduza $\exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$. Formule e deduza uma regra da distributividade do universal na conjunção.

3. O Teorema dos Nomes Próprios e o Teorema da Dedução

Sejam Γ um estoque de premissas, A uma fórmula e t_1, t_2, ... um estoque de nomes próprios distintos que não ocorrem em Γ nem em A. Nessas condições seria de se esperar que se há uma dedução de A a partir de Γ, então há uma dedução de A a partir de Γ em que os nomes próprios t_1, t_2, ... não ocorrem. Por outro lado, se há uma dedução de uma instância de A do tipo $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ a partir de Γ, então, como os nomes próprios t_1, t_2, ... são todos distintos e não ocorrem no estoque de premissas, não há nada especial sobre esses nomes e seria de se esperar que há também uma dedução de A a partir de Γ. Realmente.

32. Teorema. [Teorema dos nomes próprios]
Nas condições estabelecidas acima, há uma dedução de A a partir de Γ sem ocorrências de nomes próprios do estoque t_1, t_2, ... se e somente se há uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ a partir de Γ.

Demonstração. Se há uma dedução de A a partir de Γ, então há uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ a partir de Γ, pois $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ é instância de A.

Por outro lado, suponhamos que há uma dedução d de $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ a partir de Γ. Vamos fixar um estoque y_1, y_2, ... de pronomes distintos dois a dois e tais que nenhum deles aparece em d ou na lista x_1, x_2, ... dada. Substituímos t_1, t_2, ... por y_1, y_2, ..., respectivamente, de modo uniforme na dedução d. Essa substituição não altera as premissas de Γ (pois não é o caso que pelo menos um de t_1, t_2, ... ocorre em Γ), e preserva cada axioma e regra de inferência. Portanto, o resultado de tal substituição é uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$. Como A é, por sua vez, uma instância de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$, pois as ocorrências livres de y_1, y_2, ... na última correspondem às ocorrências livres de x_1, x_2, ... na primeira, temos que há uma dedução de A a partir de Γ sem uso de nomes próprios novos.

De modo mais preciso, demonstramos por indução no comprimento de d que a sequência obtida pela substituição uniforme de t_1, t_2, ... pelos pronomes y_1, y_2, ..., respectivamente, na dedução d, é, por sua vez, uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ sem uso dos nomes próprios novos. A sequência assim obtida é chamada abreviadamente de sequência transformada.

De fato, se d tem comprimento 1, então $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ é uma premissa de Γ ou é um axioma. No primeiro caso, como os nomes próprios novos não ocorrem em uma fórmula de Γ, concluímos que os pronomes x_1, x_2, ... não podem ocorrer em A. Disso segue que $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ é a própria A, que é também $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$. Portanto, $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ é uma fórmula de Γ e a sequência transformada é uma dedução sua. No segundo caso, como os axiomas são preservados por substituição uniforme, temos também que a sequência transformada é uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$. Agora, se d tem comprimento maior que 1 e $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ é obtida pela aplicação de uma regra de inferência, então basta usar que as regras são preservadas por substituição uniforme e a hipótese de indução para concluir que há uma dedução de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ do tipo apropriado. □

No sistema apresentado, usamos nomes próprios para fazer afirmações particulares. O uso dos pronomes é inapropriado para isso, como consequência da regra da generalização. Contudo, o teorema dos nomes próprios mostra que, qualquer afirmação deduzida a partir de premissas em que os nomes próprios t_1, t_2, ... não ocorrem corresponde a uma afirmação geral. Isso é muito útil, e é importante ter em mente a estratégia de substituir nomes próprios por pronomes preservando as deduções empregada na demonstração acima.

33. Teorema. [Teorema da dedução]
Sejam A uma sentença, B uma fórmula e Γ um estoque de fórmulas. B é dedutível a partir A e de Γ se e somente se $A \to B$ é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. Se $A \to B$ é dedutível a partir de Γ, então, usando *modus ponens* temos imediatamente que B é dedutível a partir A e de Γ.

Suponhamos que há uma dedução d de B a partir A e de Γ. Vamos demonstrar, por indução no comprimento da dedução, que d pode ser transformada em uma dedução de $A \to B$ a partir de Γ.

Passo base:

Se B é um axioma, então $A \to B$ é consequência tautológica desse axioma. Se B é A, então $A \to B$ é uma tautologia. Se B é uma premissa de Γ, então $A \to B$ é consequência tautológica dessa premissa. Em qualquer caso, temos uma dedução de $A \to B$ a partir de Γ.

Passo indutivo:

Se B é obtida como consequência tautológica de C_1, C_2, ..., fórmulas anteriores na dedução d, então $A \to B$ é obtida como consequência tautológica de $A \to C_1$, $A \to C_2$, ..., para as quais já temos deduções a partir de Γ apenas, por hipótese de indução. Portanto, a composição dessas deduções ampliada com $A \to B$ no final é uma dedução de $A \to B$ a partir de Γ.

Suponhamos que B é $\exists x C \to D$, e é obtida pela aplicação da introdução do existencial em $C \to D$, em que x não ocorre livre em D. Nesse caso, $A \to B$ é consequência tautológica de $\exists x C \to (A \to D)$. Como x não ocorre livre em A (pois A é sentença) nem em D (por hipótese), $\exists x C \to (A \to D)$, é obtida a partir de $C \to (A \to D)$ por introdução do existencial. Agora, $C \to (A \to D)$ é consequência tautológica de $A \to (C \to D)$, para a qual temos uma dedução a partir de Γ, por hipótese de indução. Está claro como compor uma dedução de $A \to B$ a partir de Γ usando a hipótese de indução e as passagens mostradas acima. □

O teorema da dedução é um grande facilitador quando estamos interessados em mostrar que há uma dedução de uma implicação a partir de premissas dadas: Bastaria deduzir o consequente a partir do estoque de premissas ampliado com o antecedente. Uma dedução desse segundo tipo é formalmente menos complexa, em geral, que a dedução direta da implicação a partir das premissas dadas apenas. Seria desejável ampliar o escopo desse método, contornando a exigência sobre o antecedente da implicação. Isso é possível com a ajuda do teorema dos nomes próprios. De fato, pelo teorema dos nomes próprios, para mostrar que há uma dedução de $A \to B$ a partir de Γ, basta mostrar que $A' \to B'$ é dedutível a partir de Γ, em que $A' \to B'$ é uma instância de $A \to B$ determinada pela substituição uniforme de todos os pronomes com ocorrências livres em A por nomes próprios novos. Podemos aplicar o teorema da dedução para $A' \to B'$ e concluir que basta mostrar que há uma dedução de B' a partir de A' e Γ para mostrar que há uma dedução de $A \to B$.

34. Exercício. Seguindo o comentário imediatamente após a regra da generalização na seção anterior, formule e demonstre o resultado geral que uma instância de uma fórmula A é dedutível a partir de A. Usando a notação da demonstração do teorema dos nomes próprios, demonstre que $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ é obtida a partir de $A_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ pela substituição de t_1, t_2, ... por y_1, y_2, ..., e, igualmente, que A é recuperada a partir de $A_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ pela troca de y_1, y_2, ... por x_1, x_2, ..., respectivamente. Mostre ainda que a troca de t_1, t_2, ... por y_1, y_2, ... preserva cada emprego de axioma e regra de inferência na dedução.

4. Substituição de Equivalentes

Uma propriedade adicional da lógica de primeira ordem é a possibilidade de substituição de uma ocorrência de uma fórmula por outra dedutivamente equivalente.

35. Teorema. [Teorema da substituição de equivalentes]
Sejam Γ um estoque de premissas, A uma fórmula, C_1, D_1, C_2, D_2, ... fórmulas dadas. Suponhamos que B é uma fórmula obtida a partir de A pela substituição de algumas ocorrências de C_1, C_2, ... por D_1, D_2, ..., respectivamente. Se $C_1 \leftrightarrow D_1$, $C_2 \leftrightarrow D_2$, ... são dedutíveis a partir de Γ, então $A \leftrightarrow B$ também é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. Podemos demonstrar o resultado por indução na complexidade de A. Antes de demonstrar os passos da indução, observamos que resultado vale no caso particular em que apenas a substituição da fórmula A inteira é realizada. De fato, nesse caso temos que as fórmulas A e B são C_i e D_i, respectivamente, para algum i. Se A e B são C_i e D_i, respectivamente, então da hipótese que $C_i \leftrightarrow D_i$ é dedutível segue que $A \leftrightarrow B$ também é dedutível. Observamos ainda se nenhuma substituição é realizada, então B é A, a equivalência $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia e o resultado também vale nesse caso.

Passo base:

Se A é atômica, então a única ocorrência de subfórmula em A é a fórmula inteira. Nesse caso, no máximo uma substitução de fórmulas pode ser realizada e o resultado está estabelecido pelas observações preliminares acima.

Passo indutivo:

Se A é $\neg E$, então, pelas observações preliminares, podemos supor que B é $\neg F$, em que F é obtida a partir de E pela substituição de ocorrências de C_1, C_2, ... por D_1, D_2, ..., respectivamente. Por hipótese de indução, $E \leftrightarrow F$ é dedutível a partir de Γ. Como $A \leftrightarrow B$ é consequência tautológica de $E \leftrightarrow F$, temos que $A \leftrightarrow B$ também é dedutível a partir de Γ.

Se A é $E \vee F$, então, pelas observações preliminares, podemos supor que B é $G \vee H$ em que G e H são obtidas a partir de E e F pela substituição de ocorrências de C_1, C_2, ... por D_1, D_2, ..., respectivamente. Por hipótese de indução, $E \leftrightarrow G$ e $F \leftrightarrow H$ são dedutíveis a partir de Γ. Como $A \leftrightarrow B$ é consequência tautológica de $E \leftrightarrow G$ e $F \leftrightarrow H$, temos que $A \leftrightarrow B$ também é dedutível a partir de Γ.

Se A é $\exists x E$, então, pelas observações preliminares, podemos supor que B é $\exists x F$, em que F é obtida a partir de E pela substituição de ocorrências de C_1, C_2, ... por D_1, D_2, ..., respectivamente. Por hipótese de indução, $E \leftrightarrow F$ é dedutível a partir de Γ. Podemos compor uma dedução de $E \leftrightarrow F$ a partir de Γ com a seguinte dedução de $A \leftrightarrow B$ a partir de $E \leftrightarrow F$ para construir a dedução desejada de $A \leftrightarrow B$ a partir de Γ:

(1) $E \leftrightarrow F$ (premissa)
(2) $E \rightarrow F$ (consequência tautológica de 1)
(3) $F \rightarrow E$ (consequência tautológica de 1)
(4) $F \rightarrow \exists x F$ (axioma da substituição)
(5) $E \rightarrow \exists x E$ (axioma da substituição)
(6) $E \rightarrow \exists x F$ (consequência tautológica de 2 e 4)
(7) $F \rightarrow \exists x E$ (consequência tautológica de 3 e 5)
(8) $\exists x E \rightarrow \exists x F$ (introdução do existencial em 6)
(9) $\exists x F \rightarrow \exists x E$ (introdução do existencial em 7)
(10) $\exists x E \leftrightarrow \exists x F$ (consequência tautológica de 8 e 9)

□

O teorema da substituição de equivalentes pode ser usado para mostrar que pronomes ligados a quantificadores em uma fórmula A podem ser renomeados para obter uma fórmula B dedutivamente equivalente a A. Isso é deixado como exercício.

36. Exercício. Mostre que se C é uma fórmula em que y não ocorre, então $\exists x C \leftrightarrow \exists y C_x[y]$ é dedutível. Use o teorema da substituição de equivalentes para mostrar que se B é obtida a partir de A pela substituição de ocorrências de fórmulas do tipo $\exists x C$ por fórmulas do tipo $\exists y C_x[y]$, em que y é um pronome que não ocorre em A, então há uma dedução de $A \leftrightarrow B$. Dizemos que uma equivalência dedutível desse tipo é uma renomeação de pronomes ligados.

5. Símbolos Novos Introduzidos com uma Descrição

Uma operação usual na teorização matemática é a introdução de símbolos novos acompanhados de uma descrição. Se uma sentença existencial $\exists x A$ é dedutível, podemos introduzir um nome próprio novo t tal que a instância $A_x[t]$ de A pode ser assumida como premissa. Dizemos que a sentença $A_x[t]$ é uma descrição de t. Se temos uma fórmula B, então podemos introduzir um símbolo de predicado novo P, cuja aridade é o número de pronomes com ocorrências livres em B, tal que a fórmula $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$ pode ser assumida como premissa, em que x_1, x_2, ... representam pronomes com ocorrências livres em B. Dizemos que a fórmula $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$ é uma descrição de P. Essas formas de introdução de símbolos novos são muito importantes, e a presente seção tem por finalidade mostrar que elas não trazem consequências adicionais que dizem respeito à linguagem original.

37. Teorema. *Sejam Γ um estoque de fórmulas, $\exists xA$ uma sentença dedutível a partir de Γ e t um nome próprio novo. Uma fórmula B sem ocorrências de t é dedutível a partir de Γ se e somente se é dedutível a partir de Γ e $A_x[t]$.*

Demonstração. Seguindo a notação do enunciado, se B é dedutível a partir de Γ, então é imediato que B é dedutível a partir de Γ e $A_x[t]$. Resta demonstrar a conversa.

Suponhamos que B seja dedutível a partir de Γ e $A_x[t]$. Pelo teorema da dedução, há uma dedução d de $A_x[t] \to B$ a partir de Γ. A demonstração do teorema dos nomes próprios mostra que a substituição do nome próprio novo t por um pronome novo y que não aparece na dedução d, transforma d em uma dedução de $A_x[y] \to B$ a partir de Γ, pois t não ocorre em B. Pela regra de introdução do existencial, $\exists yA_x[y] \to B$ é dedutível a partir de Γ.

Por hipótese, há uma dedução de $\exists xA$ a partir de Γ. Pelo exercício da seção anterior, $\exists yA_x[y]$ também é dedutível a partir de Γ. Como vimos acima, $\exists yA_x[y] \to B$ também é dedutível a partir de Γ. A composição de uma dedução de $\exists yA_x[y]$ a partir de Γ com uma dedução de $\exists yA_x[y] \to B$ a partir de Γ, seguida de uma aplicação de *modus ponens*, constitui uma dedução de B a partir de Γ. $\square$

38. Observação. Em alguns casos é de interesse introduzir um nome próprio novo para desempenhar papel semelhante ao descrito acima, mas sem a exigência que a sentença $\exists xA$ seja dedutível. Isso pode ser feito introduzindo um nome próprio novo t tal que a instância $\exists xA \to A_x[t]$ da implicação $\exists xA \to A$ pode ser assumida como premissa. De fato, como a sentença existencial $\exists x(\exists xA \to A)$ é dedutível qualquer que seja A, o teorema acima se aplica e podemos contar com $A_x[t]$ condicionalmente a $\exists xA$.

39. Exemplo. Vamos mostrar que a fórmula $P(y)$ é dedutível a partir das fórmulas $\forall y\exists xR(x, y)$, $\forall xQ(x)$ e $\forall x\forall y(R(x, y) \wedge Q(y) \to P(y))$. Pelo teorema dos nomes próprios, basta mostrar que $P(u)$ é dedutível a partir das mesmas premissas, em que u é um nome próprio novo. Como a sentença $\exists xR(x, u)$ é dedutível, podemos, pelo teorema acima, introduzir um nome próprio novo t e usar a descrição $R(t, u)$. Como $Q(u)$ e $R(t, u) \wedge Q(u) \to P(u)$ também são dedutíveis, segue que $P(u)$ é dedutível, como queríamos.

O teorema acima, junto com outros resultados já estabelecidos, pode ser usado para facilitar a tarefa de encontrar uma dedução de uma fórmula. Podemos ver que isso ocorre porque, com esse teorema, economizamos usos da regra da introdução do existencial. De modo geral, como aparece na demonstração acima, para deduzir B sem assumir $A_x[t]$ precisamos acrescentar uma aplicação da regra da introdução do existencial. Quando isso é feito de modo repetido, o ganho é substancial.

Podemos demonstrar o enunciado correspondente ao caso da introdução de um símbolo de predicado novo P com a descrição $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$. Antes disso, observamos que esse caso tem a característica adicional que a toda fórmula D, podendo conter ocorrências de P, corresponde uma fórmula D' sem ocorrências de P e tal que $D \leftrightarrow D'$ é dedutível a partir de Γ e $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$. De fato, podemos supor que nenhum pronome de D ocorre ligado em B. Caso contrário, trocamos B por uma fórmula equivalente com essa propriedade usando o exercício da seção anterior. Agora, basta trocar todas as ocorrências do tipo $P(t_1, t_2, ...)$ em D por $B_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ para obter D', e usar o teorema da substituição de equivalentes para mostrar que $D \leftrightarrow D'$ é dedutível a partir de Γ e $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$.

O resultado abaixo mostra que podemos abreviar nossas expressões através da introdução de símbolos de predicado para representar fórmulas complexas. Como as expressões podem ficar grandes e pouco claras com frequência, a possibilidade de executar abreviações é muito importante para nosso aparato teórico. A introdução de nomes próprios através de descrições também abrevia o desenvolvimento formal, como já observamos.

40. TEOREMA. *Sejam Γ um estoque de fórmulas, B uma fórmula e P um símbolo de predicado novo de aridade igual ao número de pronomes com ocorrências livres em B. Uma fórmula C sem ocorrências de P é dedutível a partir de Γ se e somente se é dedutível a partir de Γ e $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seguindo a notação do enunciado e do parágrafo imediatamente anterior, vamos mostrar que uma dedução d de uma fórmula D a partir de Γ e $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$ pode ser transformada em uma dedução de D' a partir de Γ. Isso será feito por indução no comprimento de d. Como C' é a própria C, já que C não contém ocorrências de P, o resultado que queremos segue como caso particular.

Passo base:

Se d tem comprimento 1, então D é uma premissa ou D é um axioma da substituição. Se D é uma premissa do estoque Γ, então D não contém o símbolo P e D' é D. Portanto, d é uma dedução de D' a partir de Γ. Se D é a premissa $B \leftrightarrow P(x_1, x_2, ...)$, então D' é $B \leftrightarrow B$, que é uma tautologia, portanto uma dedução de comprimento 1 de D' a partir de Γ. Por fim, se D é um axioma da substituição, $A_x[t] \to \exists x A$, então D' é $A'_x[t] \to \exists x A'$, que também é um axioma da substituição, portanto uma dedução de comprimento 1 de D' a partir de Γ.

Passo indutivo:

Suponhamos que d tem comprimento maior que 1, e D é $\exists x E \to F$ e é obtida a partir de $E \to F$ pela introdução do existencial. Nesse caso, D' é $\exists x E' \to F'$ e é obtida a partir de $E' \to F'$ pela mesma regra. Por hipótese de indução, há uma dedução de $E' \to F'$ a partir de Γ. Obtemos uma dedução de D' a partir de Γ pela composição dessa dedução de $E' \to F'$ com uma aplicação da regra de introdução do existencial.

Se d tem comprimento maior que 1 e D é obtida a partir de A_1, A_2, ... por consequência tautológica, então D' é obtida a partir de A'_1, A'_2, ... por consequência tautológica, já que a troca de ocorrências do tipo $P(t_1, t_2, ...)$ por $B_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$ transforma disjunções em disjunções e negações em negações. Por hipótese de indução, há deduções de A'_1, A'_2, ... a partir de Γ. A composição dessas deduções seguida de uma aplicação da regra de consequência tautológica constitui a dedução desejada de D' a partir de Γ. $\square$

41. Exercício. Sejam A e B fórmulas, e t um nome, tais que t não ocorre ligado em B e nenhum pronome de A ocorre ligado em B. Mostre, por indução na complexidade de A, que $A_x[t]'$ é $A'_x[t]$, em que A' é a fórmula obtida a partir de A pela troca das ocorrências do tipo $P(t_1, t_2, ...)$ por $B_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$, e analogamente para $A_x[t]'$.

6. Operações Prenexas

Vamos concluir o capítulo com deduções de algumas equivalências úteis, que são conhecidas pelo nome de operações prenexas. Por meio das operações prenexas podemos, em uma fórmula, colocar todas as quantificações à esquerda, de modo que a fórmula resultante é dedutivamente equivalente à fórmula original.

Para a negação temos duas operações prenexas, uma para o quantificador existencial no escopo da negação e outra para o quantificador universal no escopo da negação. Esses casos são bem simples, basicamente trocamos existencial por universal, e vice-versa, e passamos a quantificação para a esquerda.

42. Exemplo. [Operação prenexa para existencial na negação]

(1) $\neg\exists x\neg\neg A \leftrightarrow \forall x\neg A$ (definição de $\forall$)
(2) $\neg\neg A \leftrightarrow A$ (tautologia)
(3) $\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x\neg A$ (substituição de equivalentes)

43. Exemplo. [Operação prenexa para universal na negação]

(1) $\neg\forall x A \leftrightarrow \neg\neg\exists x\neg A$ (definição de $\forall$)
(2) $\neg\neg\exists x\neg A \leftrightarrow \exists\neg A$ (tautologia)
(3) $\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x\neg A$ (substituição de equivalentes)

Para a disjunção temos quatro operações prenexas, duas para cada quantificador. Vamos supor que B é uma fórmula sem ocorrências livres de x. Como é observado em seguida, essa suposição não é restritiva.

44. Exemplo. [Primeira operação prenexa para existencial na disjunção]

(1) $A \to \exists x A$ (axioma da substituição)
(2) $(A \vee B) \to (\exists x A \vee B)$ (consequência tautológica de 1)
(3) $\exists x(A \vee B) \to (\exists x A \vee B)$ (introdução do existencial)
(4) $A \to (A \vee B)$ (tautologia)
(5) $(A \vee B) \to \exists x(A \vee B)$ (axioma da substituição)
(6) $A \to \exists x(A \vee B)$ (consequência tautológica de 4 e 5)
(7) $\exists x A \to \exists x(A \vee B)$ (introdução do existencial)
(8) $B \to (A \vee B)$ (tautologia)
(9) $B \to \exists x(A \vee B)$ (consequência tautológica de 5 e 8)
(10) $(\exists x A \vee B) \to \exists x(A \vee B)$ (consequência tautológica de 7 e 9)
(11) $(\exists x A \vee B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$ (consequência tautológica de 3 e 10)

45. Exemplo. [Segunda operação prenexa para existencial na disjunção]

(1) $A \to \exists x A$ (axioma da substituição)
(2) $(B \vee A) \to (B \vee \exists x A)$ (consequência tautológica de 1)
(3) $\exists x(B \vee A) \to (B \vee \exists x A)$ (introdução do existencial)
(4) $A \to (B \vee A)$ (tautologia)
(5) $(B \vee A) \to \exists x(B \vee A)$ (axioma da substituição)
(6) $A \to \exists x(B \vee A)$ (consequência tautológica de 4 e 5)
(7) $\exists x A \to \exists x(B \vee A)$ (introdução do existencial)
(8) $B \to (B \vee A)$ (tautologia)
(9) $B \to \exists x(B \vee A)$ (consequência tautológica de 5 e 8)
(10) $(B \vee \exists x A) \to \exists x(B \vee A)$ (consequência tautológica de 7 e 9)
(11) $(B \vee \exists x A) \leftrightarrow \exists x(B \vee A)$ (consequência tautológica de 3 e 10)

46. Observação. A suposição que x não ocorre livre em B não é restritiva pois poderíamos, antes de realizar uma operação prenexa em $\exists x A \vee B$, por exemplo, fazer uma renomeação do pronome ligado x para obter $\exists y A_x[y] \vee B$, em que y não ocorre em $\exists x A \vee B$.

47. Exemplo. [Primeira operação prenexa para universal na disjunção]

(1) $\forall x A \to A$ (teorema da substituição)
(2) $(\forall x A \vee B) \to (A \vee B)$ (consequência tautológica de 1)
(3) $(\forall x A \vee B) \to \forall x(A \vee B)$ (introdução do universal)
(4) $\forall x(A \vee B) \to (A \vee B)$ (teorema da substituição)
(5) $(\forall x(A \vee B) \wedge \neg B) \to A$ (consequência tautológica de 4)
(6) $(\forall x(A \vee B) \wedge \neg B) \to \forall x A$ (introdução do universal)
(7) $\forall x(A \vee B) \to (\forall x A \vee B)$(consequência tautologica de 6)
(8) $(\forall x A \vee B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$ (consequência tautológica de 3 e 7)

48. Exemplo. [Segunda operação prenexa do universal na disjunção]
(1) $\forall xA \to A$ (teorema da substituição)
(2) $(B \vee \forall xA) \to (B \vee A)$ (consequência tautológica de 1)
(3) $(B \vee \forall xA) \to \forall x(B \vee A)$ (introdução do universal)
(4) $\forall x(B \vee A) \to (B \vee A)$ (teorema da substituição)
(5) $(\forall x(B \vee A) \wedge \neg B) \to A$ (consequência tautológica de 4)
(6) $(\forall x(B \vee A) \wedge \neg B) \to \forall xA$ (introdução do universal)
(7) $\forall x(B \vee A) \to (B \vee \forall xA)$(consequência tautologica de 6)
(8) $(B \vee \forall xA) \leftrightarrow \forall x(B \vee A)$ (consequência tautológica de 3 e 7)

A segunda operação prenexa do existencial na disjunção pode ser usada para mostrar que a sentença $\exists x(\exists xA \to A)$, usada na observação 38 acerca da introdução de nomes próprios novos acompanhados de uma descrição, é dedutível. Realmente, $\exists x(\exists xA \to A)$ é a abreviação de $\exists x(\neg\exists xA \vee A)$ que, segundo a operação prenexa mencionada, é dedutível, já que $\neg\exists xA \vee \exists xA$ é um axioma.

49. Exercício. Mostre como obter operações prenexas para conjunção e implicação por meio das operações prenexas já deduzidas para negação e disjunção. Use as operações prenexas para transformar a fórmula

$$(\exists xP(x) \wedge \forall yQ(y)) \to \forall y\exists xR(x, y)$$

em uma fórmula dedutivamente equivalente e com todos os quantificadores à esquerda.

CAPíTULO 3

Teoria Geral das Deduções

1. Um Sistema Dedutivo Para Sentenças

Vamos estabelecer um novo sistema formal que opera apenas com sentenças, por isso será chamado de sistema para sentenças, em contraste com o sistema original. Veremos no teorema das premissas abertas que esse sistema é forte o suficiente para fazer deduções a partir de premissas sem quantificadores. Seu estoque de nomes próprios é obtido a partir do estoque do sistema original pela adição de nomes próprios novos, ilimitados em quantidade. A importância desse novo sistema formal está na eliminação parcial do corte, que será muito útil na sequência. O sistema é determinado pelas regras e axiomas a seguir, em que apenas sentenças são utilizadas.

- Axioma do terceiro excluído restrito: $\neg A \vee A$, se A é atômica.
- Regra das disjuntas primas: $\dfrac{A}{B}$, se toda disjunta prima de A é disjunta prima de B.
- Regra da prova por casos: $\dfrac{\neg A\vee C \quad \neg B\vee C}{\neg(A\vee B)\vee C}$
- Regra da introdução da dupla negação: $\dfrac{A\vee B}{\neg\neg A\vee B}$
- Regra fraca do corte: $\dfrac{A\vee B \quad \neg A\vee C}{B\vee C}$, se A é livre de pronomes.
- Regra do existencial antecedente: $\dfrac{\neg A_x[t]\vee B}{\neg\exists x A\vee B}$, se t é nome próprio novo e não ocorre na conclusão.
- Regra do existencial consequente: $\dfrac{A_x[t]\vee B}{\exists x A\vee B}$

Nosso objetivo agora é mostrar que o sistema acima é forte o suficiente quando comparado com o sistema original. Vamos começar mostrando como deduzir as sentenças que correspondem ao axioma do terceiro excluído e as sentenças que correspondem ao axioma da substituição. Para o restante da seção, assumimos que estamos trabalhando no novo sistema formal.

50. Lema. *O axioma do terceiro excluído, $\neg A \vee A$, em que A é uma sentença qualquer que pode ter ocorrências dos nomes próprios novos do atual sistema, é dedutível no sistema.*

Demonstração. Demonstração por indução na complexidade de A, portanto dedutível.

Passo base:

Se A é sentença atômica, então $\neg A \vee A$ é um axioma.

Passo indutivo:

Se A é $\neg B$, então

(1) $\neg B \vee B$ (hipótese de indução)
(2) $B \vee \neg B$ (disjuntas primas)
(3) $\neg\neg B \vee \neg B$ (introdução da dupla negação)

constitui uma dedução de $\neg A \vee A$ por composição com uma dedução de $\neg B \vee B$.

Se A é $B \vee C$, então

(1) $\neg B \vee B$ (hipótese de indução)
(2) $\neg B \vee (B \vee C)$ (disjuntas primas)
(3) $\neg C \vee C$ (hipótese de indução)
(4) $\neg C \vee (B \vee C)$ (disjuntas primas)
(5) $\neg(B \vee C) \vee (B \vee C)$ (prova por casos em 2, 4)

constitui uma dedução de $\neg A \vee A$ por composição com deduções de $\neg B \vee B$ e de $\neg C \vee C$.

Se A é $\exists x B$, então

(1) $\neg B_x[t] \vee B_x[t]$, em que t é um nome próprio novo que não ocorre em B (hipótese de indução)
(2) $B_x[t] \vee \neg B_x[t]$ (disjuntas primas)
(3) $\exists B \vee \neg B_x[t]$ (existencial consequente)
(4) $\neg B_x[t] \vee \exists x B$ (disjuntas primas)
(5) $\neg\exists x B \vee \exists x B$ (existencial antecedente)

constitui uma dedução de $\neg A \vee A$ por composição com uma dedução de $\neg B_x[t] \vee B_x[t]$. □

51. Exercício. Mostre que o axioma da substituição, $\neg A_x[t] \vee \exists x A$, em que t é nome próprio qualquer e $\exists x A$ é uma sentença que pode ter ocorrências de nomes próprios novos, é dedutível.

2. O Lema das Linhas de Dedução

Vamos agora tratar da regra do corte. Dizemos que A é uma sentença de corte se é possível deduzir $B \vee C$ no sistema, sempre que $A \vee B$ e $\neg A \vee C$ são dedutíveis. Queremos mostrar que toda sentença é sentença de corte no sistema para sentenças. Na verdade vamos demonstrar um fato ainda mais forte, o teorema da eliminação parcial do corte da seção seguinte. Antes de considerar esse teorema precisamos de uma definição e de um resultado preliminar.

Dizemos de um estoque de sentenças que ele é regular se para cada fórmula A no estoque, qualquer outra sentença obtida a partir de A pela substituição uniforme de nomes próprios novos por nomes próprios quaisquer também está no estoque.

52. Teorema. [Lema das linhas de dedução]

Sejam A uma sentença, Γ um estoque regular de sentenças, t_1, t_2, ... nomes próprios novos em quantidade finita. Uma dedução de A a partir de Γ pode ser transformada em uma dedução de A a partir de Γ tal que (i) cada ocorrência de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior, e (ii) se a regra do existencial antecedente é usada com $\neg B_x[t] \vee C$ como premissa, então t não é da lista t_1, t_2, ... dada.

Demonstração. Seja α uma dedução de A. Vamos mostrar primeiro como transformar α em uma dedução α' de A satisfazendo (i). A propriedade (i) diz respeito às ocorrências de sentenças em uma dedução, não às sentenças simplesmente. Uma dedução é uma sequência de sentenças, por isso uma sentença pode ocorrer repetidamente em uma dedução. Devemos, portanto, ter em mente as ocorrências de sentenças em α, não apenas as sentenças que ocorrem em α. Em particular, faremos a demonstração por indução no número de ocorrências de sentenças em α que não satisfazem (i).

Se toda ocorrência de sentença em α satisfaz (i), então estipulamos que α' é α. Caso contrário, seja D a sentença que corresponde à primeira a ocorrência de sentença que não satisfaz (i) (como α é uma sequência, tal ocorrência existe e é única, desde que exista uma ocorrência de sentença que não satisfaz (i)). Seja $n \geq 0$ o número de vezes que tal ocorrência, dita relevante, de D é usada como premissa de uma regra em α.

Há uma subsequência de α que é uma dedução de D e que satisfaz (i). Vamos construir tal subsequência e mostrar que ela satisfaz (i). É importante ter em mente que cada ocorrência de sentença anterior à ocorrência relevante de D é usada apenas uma vez como premissa para concluir uma sentença posterior em α.

Seja β a subsequência de α construída do fim para o começo do seguinte modo: O último termo de β é D, correspondendo à ocorrência relevante de D em α. Suponhamos que os m últimos termos de β já foram definidos. Suponhamos que há uma ocorrência de sentença anterior à ocorrência relevante de D em α tal que o único uso dessa ocorrência como premissa de regra infere, como conclusão, um dos m termos já definidos, e tal que essa ocorrência não está entre esses m termos. Tomamos agora a última ocorrência de sentença em α satisfazendo tal propriedade, e seja E a sentença com essa ocorrência. Definimos os $m+1$ últimos termos de β colocando E antes dos m últimos termos definidos. Se não há uma ocorrência de sentença em α satisfazendo tal propriedade, então β é dada pelos seus m últimos termos.

Podemos mostrar que β é uma dedução de D e satisfaz (i). De fato, se E é termo de β, então E é D ou, por definição, E é usado uma única vez como premissa para inferir um termo posterior de β. Isso mostra que β satisfaz (i). Agora, se E é termo de β e E não é obtido por termos anteriores de β pela aplicação de uma regra, então não há uma ocorrência de sentença anterior à ocorrência relevante de D em α tal que o único uso dessa ocorrência como premissa de regra infere E como conclusão. Como α é uma dedução e E ocorre antes da ocorrência relevante de D em α, temos que E é um axioma ou uma sentença em Γ.

Substituímos α por uma dedução de A construída do seguinte modo: Começamos com as ocorrências de sentenças anteriores à ocorrência relevante de D que não correspondem a termos de β, ou seja, que não foram incluídas como termos de β na construção acima. Essas ocorrências são colocadas em sequência na ordem induzida por α. Vamos chamar essa sequência que forma a primeira parte da nossa dedução de γ. Em seguida acrescentamos a composição consecutiva de n cópias da subsequência β que termina em D. Cada cópia dessas está associada a um uso da ocorrência relevante de D como premissa de uma regra para inferir uma sentença posterior na dedução original α. Seguindo imediatamente essas n cópias consecutivas, acrescentamos o segmento final de α após a ocorrência relevante de D.

A sequência assim obtida é uma dedução de A. A única coisa que precisamos verificar é que a primeira parte χ, formada pelas ocorrências de sentenças que não foram incluídas como termos de β na ordem que aparecem em α, satisfaz a condição de uma dedução. Isso segue do fato que as ocorrências de sentenças que foram incluídas como termos de β, e que são anteriores a alguma ocorrência que não foi incluída, são usadas uma única vez como premissa e a conclusão correspondente é também termo de β. Portanto, se algum termo de χ não é um axioma e não é uma sentença de Γ, então é obtido por uma regra a partir de ocorrências anteriores que, não estando em β, estão em χ.

O número de ocorrências de sentenças na nova dedução de A que não satisfazem (i) é uma unidade menor que o número de ocorrências de sentenças em α que não satisfazem (i). Por hipótese de indução, a nova dedução de A pode ser transformada em uma dedução de A que satisfaz (i). Essa última dedução é a α' desejada.

Definimos a *linha* de uma ocorrência de uma sentença em α' como a subsequência γ de α' construída do fim para o começo do mesmo modo que a subsequência β acima: O último termo de γ corresponde à ocorrência relevante. Suponhamos que os m últimos termos de γ já foram definidos. Suponhamos que há uma ocorrência de sentença anterior à ocorrência relevante tal que o único uso dessa ocorrência como premissa de regra é para inferir, como conclusão, um dos m termos já definidos, e tal que essa ocorrência não está entre esses m termos. Tomamos agora a última ocorrência de sentença em α' satisfazendo tal propriedade e definimos com ela os $m+1$ últimos termos de γ. Se não há uma ocorrência de sentença em α' satisfazendo tal propriedade, então γ é dada pelos seus m últimos termos.

A linha de uma ocorrência de uma sentença D em α' é uma dedução de D satisfazendo (i). Portanto, apenas a ocorrência da sentença D onde a linha termina pode ser usada como premissa de regra que infere uma ocorrência de sentença fora da linha. O único uso de cada um dos outros termos da linha como premissa de regra infere, como conclusão, um dos termos da linha.

É possível, agora, transformar α' em uma dedução α'' de A que satisfaz (i) e (ii). Vamos demonstrar isso por indução no número de linhas que terminam em uma sentença do tipo $\neg\exists xB \vee C$, obtida a partir de $\neg B_x[u] \vee C$, em que u é um dentre t_1, t_2, ..., pela regra do existencial antecedente.

Se não há linhas desse tipo em α', então estipulamos que α'' é α'. Suponhamos que a regra do existencial antecedente é usada com $\neg B_x[u] \vee C$ como premissa para inferir uma ocorrência de $\neg\exists xB \vee C$ em α', em que u é um dos nomes próprios novos que queremos evitar. Sejam γ a linha de $\neg\exists xB \vee C$ em questão e t um nome próprio novo que não foi usado e não é um daqueles que queremos evitar.

A substituição uniforme de u por t em γ transforma γ em uma sequência γ' que ainda é uma dedução de $\neg\exists xB\vee C$ que satisfaz (i). De fato, a sentença $\neg\exists xB\vee C$ não é alterada por essa substituição. Além disso, $\neg B_x[u]\vee C$ é transformada em $\neg B_x[t]\vee C$, que também pode ser usada como premissa para a regra do existencial antecedente, pois t não aparece em $\neg\exists xB \vee C$, por hipótese. Mais ainda, a substituição uniforme de u por t preserva o uso das regras de inferência, do axioma e de sentenças de Γ: Não há dificuldade em verificar que se uma sentença E é um axioma ou é obtida pela aplicação de uma regra de inferência com certas premissas, então a substituição uniforme de u por t em E produz uma sentença que também é um axioma ou é obtida pela aplicação da mesma regra de inferência com novas premissas produzidas pela substituição uniforme de u por t nas premissas originais. Além disso, Γ é fechado por substituição uniforme de nomes próprios novos, por hipótese. Portanto, γ' ainda é uma dedução de $\neg\exists xB \vee C$ que satisfaz (i).

Com isso, a substituição de γ em α' por γ' transforma α' em outra dedução de A que ainda satisfaz (i). Isso é uma dedução de A pois, como a única ocorrência de sentença de γ que pode ser usada fora de γ é a ocorrência de $\neg\exists xB \vee C$ onde a linha termina, a subsequência de α' determinada pela supressão dos termos de γ anteriores à ocorrência terminal de $\neg\exists xB \vee C$ em γ é uma dedução de A a partir de $\neg\exists xB \vee C$. Portanto, a composição indicada dessa dedução com γ' produz uma dedução de A. É claro que essa dedução satisfaz (i). Mas agora o número linhas de tipo relevante foi reduzido. Por hipótese de indução, a nova dedução de A pode ser transformada em uma dedução de A que satisfaz (i) e (ii). Essa nova dedução é a α'' desejada. □

53. Observação. Se uma sentença $\neg A_x[t] \vee B$ é usada como premissa em uma aplicação da regra do existencial antecedente, então dizemos que o nome próprio novo t é o nome próprio crítico dessa aplicação da regra.

54. Exercício. Utilizando a notação da demonstração acima, mostre que se linhas de ocorrências de sentenças quaisquer em α' possuem termos em comum, então uma delas é subsequência da outra. Verifique ainda que a substituição uniforme de u por t preserva o uso das regras de inferência e do axioma.

3. Eliminação Parcial do Corte

55. Teorema. [Teorema da eliminação parcial do corte]
Para cada sentença A, se $A \vee B$ e $\neg A \vee C$ são dedutíveis no sistema para sentenças a partir de um estoque Γ de sentenças livres de pronomes e regular, então é possível deduzir $B \vee C$ a partir de Γ.

Demonstração. Para evitar a repetição, dizemos de uma sentença A com a propriedade expressa no enunciado acima que A é uma sentença de corte. Vamos demonstrar, por indução na complexidade de A, que toda sentença A é uma sentença de corte.

Passo base:

Toda sentença livre de pronomes é sentença de corte pela regra fraca do corte.

Passo indutivo:

Caso 1

Suponhamos que A seja $\neg D$, onde D é uma sentença de corte por hipótese de indução. Podemos supor ainda que A não é livre de pronomes. Por hipótese, $\neg D \vee B$ e $\neg\neg D \vee C$ são dedutíveis a partir de Γ. Pelo lema das linhas de dedução, há uma dedução de $\neg\neg D \vee C$ a partir de Γ tal que cada ocorrência de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior. Basta mostrar que essa dedução pode ser transformada em uma dedução de $D \vee C$ e usar a hipótese de indução para concluir que A é uma sentença de corte.

Vamos demonstrar que se α é uma dedução (a partir de Γ) de uma sentença E que contém $\neg\neg D$ como disjunta prima, tal que cada ocorrência em α de sentença distinta da conclusão final é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior, então α pode ser transformada em uma dedução (a partir de Γ) de qualquer sentença E' obtida a partir de E pela substituição de algumas ocorrências de $\neg\neg D$ como disjunta prima de E por D. Isso será feito por indução no comprimento de α. Reforçamos que apenas ocorrências de $\neg\neg D$ como disjunta prima podem ser substituídas para formar E' a partir de E. Uma eventual ocorrência de $\neg\neg D$ em E, que não é uma ocorrência como disjunta prima, não é substituída. Por exemplo, se E é $\exists x F \vee G$, então nenhuma ocorrência de $\neg\neg D$ como subfórmula da primeira componente de E pode ser substituída, e E' deve ser da forma $\exists x F \vee G'$, e não da forma $\exists x F' \vee G'$.

Como D não é livre de pronomes, E não pode ser um axioma, nem uma sentença de Γ. Isso dá conta do passo base. Vamos começar o passo indutivo pelos casos mais complexos, correspondentes às regras com duas premissas. Para usar a hipótese de indução é importante ter em mente que as linhas de uma ocorrência qualquer de uma sentença em α satisfazem a condição sobre α acima, ou seja, que cada ocorrência na linha de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra.

Suponhamos que E é $\neg(F \vee G) \vee H$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pela regra da prova por casos. Como $\neg\neg D$ é disjunta prima de E e não pode ser $\neg(F \vee G)$, temos que $\neg\neg D$ é disjunta prima de H, e E' é $\neg(F \vee G) \vee H'$. Como essas ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum e, por hipótese de indução, podem ser transformadas em deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição das linhas das ocorrências dadas de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pelas deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$ obtidas acima, seguida de uma aplicação da regra da prova por casos para inferir $\neg(F \vee G) \vee H'$.

Se E é $F \vee G$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ pela regra fraca do corte, então E' é $F' \vee G'$. Como essas ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição independente das linhas das ocorrências dadas de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ por deduções de $H \vee F'$ e $\neg H \vee G'$, obtidas por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra fraca do corte para inferir $F' \vee G'$.

Passamos aos casos correspondentes às regras com uma premissa.

Suponhamos que E foi obtida em α a partir de uma ocorrência de F pela regra das disjuntas primas. Nesse caso, se $\neg\neg D$ ocorre como disjunta prima de F, então substituímos tais ocorrências por D, resultando em F'. A linha dessa ocorrência de F em α pode ser transformada, por hipótese de indução, em uma dedução de F'. Uma dedução de E' pode ser obtida a partir dessa dedução de F', dada pela hipótese de indução, seguida de uma aplicação da própria regra das disjuntas primas. Se $\neg\neg D$ não é disjunta prima de F, então toda disjunta prima de F é também disjunta prima de E', e uma dedução de E' pode ser obtida a partir da linha original que termina na ocorrência dada de F seguida de uma aplicação da regra das disjuntas primas.

Suponhamos que E é $\neg\neg F \vee G$ e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $F \vee G$ pela regra da introdução da dupla negação. Se $\neg\neg D$ é $\neg\neg F$, então E' pode ser $\neg\neg F \vee G'$ e pode ser $F \vee G'$. No primeiro caso, uma dedução de E' é obtida a partir de uma dedução de $F \vee G'$, dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra da introdução da dupla negação para inferir $\neg\neg F \vee G'$. No segundo caso, uma dedução de E' é obtida diretamente como a própria dedução dada pela hipótese de indução.

Se E é $\neg\exists x F \vee G$ ou é $\exists x F \vee G$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $\neg F_x[t] \vee G$ ou de $F_x[t] \vee G$ pelas regras do existencial antecedente ou do existencial consequente, respectivamente, então E' é $\neg\exists x F \vee G'$ ou é $\exists x F \vee G'$, e uma dedução sua pode ser obtida pelas mesmas regras e pela hipótese de indução.

Isso termina a demonstração que $\neg D$ é sentença de corte sempre que D o for.

Caso 2

Suponhamos que A seja $D \vee E$, em que D e E são sentenças de corte, e que A não seja livre de pronomes. Por hipótese, $(D \vee E) \vee B$ e $\neg(D \vee E) \vee C$ são dedutíveis a partir de Γ, e há uma dedução de $\neg(D \vee E) \vee C$ a partir de Γ tal que cada ocorrência de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra. Basta mostrar que essa dedução pode ser transformada em uma dedução de $\neg D \vee C$ e em uma dedução de $\neg E \vee C$ e usar a hipótese de indução para compor a dedução abaixo e concluir que A é uma sentença de corte:

(1) $(D \vee E) \vee B$ (premissa)
(2) $D \vee (E \vee B)$ (disjuntas primas)
(3) $\neg D \vee C$ (premissa)
(4) $(E \vee B) \vee C$ (sentença de corte)
(5) $E \vee (B \vee C)$ (disjuntas primas)
(6) $\neg E \vee C$ (premissa)
(7) $(B \vee C) \vee C$ (sentença de corte)
(8) $B \vee C$ (disjuntas primas)

Vamos demonstrar que se α é uma dedução (a partir de Γ) de uma sentença F que contém ocorrências de $\neg(D \vee E)$ como disjunta prima, tal que cada ocorrência em α de sentença distinta da conclusão final é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior, então α pode ser transformada em uma dedução (a partir de Γ) de qualquer sentença F' obtida a partir de F pela substituição de algumas ocorrências de $\neg(D \vee E)$ como disjunta prima por $\neg D$, e igualmente para $\neg E$. Isso será feito por indução no comprimento de α. Reforçamos que apenas ocorrências de $\neg(D \vee E)$ como disjunta prima podem ser substituídas para formar F' a partir de F.

Como F não é livre de pronomes, pois contém $\neg A$ como disjunta prima, F não pode ser um axioma, nem uma sentença de Γ. Isso dá conta do passo base. Vamos começar o passo indutivo pelos casos mais complexos, correspondentes às regras com duas premissas. Para usar a hipótese de indução é importante lembrar que as linhas de uma ocorrência qualquer de uma sentença em α satisfazem a condição sobre α acima.

Suponhamos que F é $\neg(G \vee H) \vee I$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $\neg G \vee I$ e $\neg H \vee I$ pela regra da prova por casos. Temos duas possibilidades mutuamente excludentes para F': Ou F' é $\neg D \vee I'$, caso em que D é G e E é H, ou é $\neg(G \vee H) \vee I'$. No primeiro caso, $\neg G \vee I$ é $\neg D \vee I$ e, por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg D \vee I'$, ou seja, de F'. Resta mostrar que também há uma dedução de F' no segundo caso. As ocorrências de $\neg G \vee I$ e $\neg H \vee I$, usadas para inferir a ocorrência final de F em α, não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença. Portanto, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum e, por hipótese de indução, podem ser transformadas em deduções de $\neg G \vee I'$ e $\neg H \vee I'$. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de F' pela substituição das linhas das ocorrências dadas de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pelas deduções de $\neg G \vee I'$ e $\neg H \vee I'$ obtidas acima, seguida de uma aplicação da regra da prova por casos para inferir $\neg(G \vee H) \vee I'$.

Se F é $G \vee H$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $I \vee G$ e $\neg I \vee H$ pela regra fraca do corte, então F' é $G' \vee H'$. Como essas ocorrências de $I \vee G$ e $\neg I \vee H$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de F, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de F' pela substituição independente das linhas das ocorrências dadas de $I \vee G$ e $\neg I \vee H$ por deduções de $I \vee G'$ e $\neg I \vee H'$, obtidas por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra fraca do corte para inferir $F' \vee G'$.

Suponhamos que F foi obtida em α a partir de uma ocorrência de G pela regra das disjuntas primas. Nesse caso, se $\neg(D \vee E)$ ocorre como disjunta prima de G, então substituímos tais ocorrências por $\neg D$, resultando em G'. A linha dessa ocorrência de G em α pode ser transformada, por hipótese de indução, em uma dedução de G'. Uma dedução de F' pode ser obtida a partir dessa dedução de G', seguida de uma aplicação da própria regra das disjuntas primas. Se $\neg(D \vee E)$ não é disjunta prima de G, então toda disjunta prima de G é também disjunta prima de F', e uma dedução de F' pode ser obtida a partir da linha original que termina na ocorrência dada de G seguida de uma aplicação da regra das disjuntas primas.

Suponhamos que F é $\neg\neg G \vee H$ e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $G \vee H$ pela regra da introdução da dupla negação. Temos que F' é $\neg\neg G \vee H'$, e uma dedução de F' é obtida a partir de uma dedução de $G \vee H'$, dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra da introdução da dupla negação para inferir $\neg\neg G \vee H'$.

Se F é $\neg\exists x G \vee H$ ou é $\exists x G \vee H$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $\neg G_x[t] \vee H$ ou de $G_x[t] \vee H$ pelas regras do existencial antecedente ou do existencial consequente, respectivamente, então F' é $\neg\exists x G \vee H'$ ou é $\exists x G \vee H'$, e uma dedução sua pode ser obtida pelas mesmas regras e pela hipótese de indução.

Isso termina a demonstração que α pode ser transformada em uma dedução (a partir de Γ) de qualquer sentença F' obtida a partir de F pela substituição de algumas ocorrências de $\neg(D \vee E)$, como disjunta prima, por $\neg D$. Trocando $\neg D$ por $\neg E$ nos parágrafos acima, concluímos que o mesmo vale para a substituição de algumas ocorrências de $\neg(D \vee E)$ como disjunta prima por $\neg E$. Portanto, $D \vee E$ é sentença de corte sempre que D e E forem.

Caso 3

Suponhamos que A seja $\exists xD$, onde $D_x[t]$ é sentença de corte, qualquer que seja o nome próprio t, por hipótese de indução. Por hipótese, $\exists xD \vee B$ e $\neg\exists xD \vee C$ são dedutíveis a partir de Γ. Pelo lema das linhas de dedução, há deduções de $\exists xD \vee B$ e $\neg\exists xD \vee C$ a partir de Γ tais que (i) cada ocorrência de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior, e (ii) se a regra do existencial antecedente é usada com u como nome próprio crítico, então u não ocorre em A.

Primeira Etapa:

Vamos demonstrar primeiro que, se α é uma dedução (a partir de Γ) de uma sentença E que contém $\neg\exists xD$ como disjunta prima e satisfaz as condições (i) e (ii), então α pode ser transformada em uma dedução (a partir de Γ) de qualquer sentença E' obtida a partir de E pela substituição de algumas ocorrências de $\neg\exists xD$ como disjunta prima de E por $\neg D_x[v]$, em que v é um nome próprio novo que não ocorre em α e não ocorre em C. Isso será feito por indução no comprimento de α.

Como E não é livre de pronomes, pois contém $\neg A$ como disjunta prima, E não pode ser um axioma, nem uma sentença de Γ. Isso dá conta do passo base. Vamos considerar o passo indutivo. Para usar a hipótese de indução é importante ter em mente que as linhas de uma ocorrência qualquer de uma sentença em α satisfazem a condição sobre α acima, ou seja, que cada ocorrência na linha de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra.

Suponhamos que E é $\neg(F \vee G) \vee H$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pela regra da prova por casos. Como $\neg\exists xD$ é disjunta prima de E e não pode ser $\neg(F \vee G)$, temos que $\neg\exists xD$ é disjunta prima de H, e E' é $\neg(F \vee G) \vee H'$. Como essas ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum e, por hipótese de indução, podem ser transformadas em deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição das linhas das ocorrências dadas de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pelas deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$ obtidas acima, seguida de uma aplicação da regra da prova por casos para inferir $\neg(F \vee G) \vee H'$.

Se E é $F \vee G$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ pela regra fraca do corte, então E' é $F' \vee G'$. Como essas ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição independente das linhas das ocorrências dadas de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ por deduções de $H \vee F'$ e $\neg H \vee G'$, obtidas por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra fraca do corte para inferir $F' \vee G'$.

Suponhamos que E foi obtida em α a partir de uma ocorrência de F pela regra das disjuntas primas. Nesse caso, se $\neg\exists xD$ ocorre como disjunta prima de F, então substituímos tais ocorrências por $\neg D_x[v]$, resultando em F'. A linha dessa ocorrência de F em α pode ser transformada, por hipótese de indução, em uma dedução de F'. Uma dedução de E' pode ser obtida a partir dessa dedução de F', dada pela hipótese de indução, seguida de uma aplicação da própria regra das disjuntas primas. Se $\neg\exists xD$ não é disjunta prima de F, então toda disjunta prima de F é também disjunta prima de E', e uma dedução de E' pode ser obtida a partir da linha original que termina na ocorrência dada de F seguida de uma aplicação da regra das disjuntas primas.

Suponhamos que E é $\neg\neg F \vee G$ e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $F \vee G$ pela regra da introdução da dupla negação. Temos que E' é $\neg\neg F \vee G'$, e uma dedução de E' é obtida a partir de uma dedução de $F \vee G'$, dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra da introdução da dupla negação para inferir $\neg\neg F \vee G'$.

Se E é $\exists xF \vee G$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $F_x[t] \vee G$ pela regra do existencial consequente, então E' é $\exists xF \vee G'$, e uma dedução sua pode ser obtida a partir da dedução de $F_x[t] \vee G'$ dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra do existencial consequente.

Suponhamos que E é $\neg\exists yF \vee G$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $\neg F_y[t] \vee G$ pela regra do existencial antecedente. Como α satisfaz a condiçao (ii), o nome próprio novo t não ocorre em E. Usando isso e a hipótese que Γ é regular, podemos mostrar com uma indução simples que a linha de $\neg F_y[t] \vee G$ em α pode ser transformada em uma dedução de $\neg F_y[v] \vee G$, que ainda satisfaz (i) e (ii), pela substituição de certas ocorrências de t por v. Portanto, podemos substituir α por uma dedução β de E que satisfaz as condições (i) e (ii), e é tal que E foi obtida em β a partir de uma ocorrência de $\neg F_y[v] \vee G$ pela regra do existencial antecedente.

Temos duas possibilidades mutuamente excludentes para E': Ou E' é $\neg D_x[v] \vee G'$, caso em que D é F e x é y, ou é $\neg\exists yF \vee G'$. No primeiro caso, $\neg F_y[v] \vee G$ é $\neg D_x[v] \vee G$ e, por hipótese de indução, há uma dedução de $\neg D_x[v] \vee G'$, ou seja, de E'. Resta mostrar que também há uma dedução de E' no segundo caso. Para isso basta compor a dedução de $\neg F_y[v] \vee G'$ dada pela hipótese de indução com uma aplicação da regra do existencial consequente para inferir $\neg\exists yF \vee G'$.

Segunda Etapa:

Vamos demonstrar agora que se α é uma dedução (a partir de Γ) de uma sentença E que contém $\exists xD$ como disjunta prima, que satisfaz as condições (i) e (ii), e há uma dedução de $\neg D_x[v] \vee C$ que também satisfaz (i) e (ii) e tal que v é novo e não ocorre em C, então α pode ser transformada em uma dedução (a partir de Γ) de qualquer sentença E' obtida a partir de E pela substituição de algumas ocorrências de $\exists xD$ como disjunta prima de E por C. Isso será feito por indução no comprimento de α.

Como E não é livre de pronomes, E não pode ser um axioma, nem uma sentença de Γ. Isso basta para o passo base. Vamos considerar o passo indutivo. Para usar a hipótese de indução é importante lembrar que as linhas de uma ocorrência qualquer de uma sentença em α satisfazem a condição sobre α acima, ou seja, que cada ocorrência na linha de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra.

Suponhamos que E é $\neg(F \vee G) \vee H$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pela regra da prova por casos. Como $\exists xD$ é disjunta prima de E e não pode ser $\neg(F \vee G)$, temos que $\exists xD$ é disjunta prima de H, e E' é $\neg(F \vee G) \vee H'$. Como essas ocorrências de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum e, por hipótese de indução, podem ser transformadas em deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição independente das linhas das ocorrências dadas de $\neg F \vee H$ e $\neg G \vee H$ pelas deduções de $\neg F \vee H'$ e $\neg G \vee H'$ obtidas acima, seguida de uma aplicação da regra da prova por casos para inferir $\neg(F \vee G) \vee H'$.

Se E é $F \vee G$ e foi obtida em α a partir de ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ pela regra fraca do corte, então E' é $F' \vee G'$. Como essas ocorrências de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ não são usadas como premissas para concluir outra ocorrência de sentença que não seja a ocorrência dada de E, nenhuma delas pode ocorrer na linha da outra, e a linha de uma não pode ser subsequência da linha da outra. Concluímos que essas linhas em α não possuem termo comum. Portanto, α pode ser transformada em uma dedução de E' pela substituição independente das linhas das ocorrências dadas de $H \vee F$ e $\neg H \vee G$ por deduções de $H \vee F'$ e $\neg H \vee G'$, obtidas por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra fraca do corte para inferir $F' \vee G'$.

Suponhamos que E foi obtida em α a partir de uma ocorrência de F pela regra das disjuntas primas. Nesse caso, se $\exists xD$ ocorre como disjunta prima de F, então substituímos tais ocorrências por C, resultando em F'. A linha dessa ocorrência de F em α pode ser transformada, por hipótese de indução, em uma dedução de F'. Uma dedução de E' pode ser obtida a partir dessa dedução de F', dada pela hipótese de indução, seguida de uma aplicação da própria regra das disjuntas primas. Se $\exists xD$ não é disjunta prima de F, então toda disjunta prima de F é também disjunta prima de E', e uma dedução de E' pode ser obtida a partir da linha original que termina na ocorrência dada de F seguida de uma aplicação da regra das disjuntas primas.

Suponhamos que E é $\neg\neg F \vee G$ e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $F \vee G$ pela regra da introdução da dupla negação. Temos que E' é $\neg\neg F \vee G'$, e uma dedução de E' é obtida a partir de uma dedução de $F \vee G'$, dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da regra da introdução da dupla negação.

Se E é $\neg\exists yF \vee G$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $\neg F_x[t] \vee G$ pela regra do existencial antecedente, então E' é $\neg\exists xF \vee G'$, e uma dedução sua pode ser obtida a partir da dedução de $\neg F_x[t] \vee G'$, dada por hipótese de indução, seguida de uma aplicação da própria regra do existencial antecedente.

Suponhamos que E é $\exists yF \vee G$, e foi obtida em α a partir de uma ocorrência de $F_y[t] \vee G$ pela regra do existencial consequente. Temos duas possibilidades mutuamente excludentes para E': Ou E' é $C \vee G'$, caso em que D é F e x é y, ou é $\exists yF \vee G'$. No primeiro caso, $F_y[t] \vee G$ é $D_x[t] \vee G$ e, por hipótese, há uma dedução de $\neg D_x[v] \vee C$ que satisfaz (i) e (ii). Usando a hipótese que Γ é regular, podemos mostrar com uma indução simples que essa dedução de $\neg D_x[v] \vee C$ pode ser transformada em uma dedução de $\neg D_x[t] \vee C$. Da hipótese que $D_x[t]$ é sentença de corte, obtemos uma dedução de $G' \vee C$, e, consequentemente, de E' pela regra das disjuntas primas. No segundo caso, por hipótese de indução, temos uma dedução de $F_y[t] \vee G'$, que pode ser transformada em uma dedução de $\exists yF \vee G'$ pela aplicação imediata da regra do existencial consequente.

Agora podemos demonstrar que $\exists xD$ é sentença de corte. Podemos fixar deduções α de $\exists xD \vee B$ e α' de $\neg\exists xD \vee C$ a partir de Γ tais que (i) cada ocorrência de sentença distinta da conclusão é utilizada exatamente uma vez como premissa de regra para inferir uma sentença posterior, e (ii) se a regra do existencial antecedente é usada com u como nome próprio crítico, então u não ocorre em $\exists xD$. Pela primeira etapa, temos uma dedução (a partir de Γ) de $\neg D_x[v] \vee C$, em que v é um nome próprio novo que não ocorre em α', que satisfaz (i) e (ii). Pela segunda etapa, α pode ser transformada em uma dedução de $C \vee B$. Da regra das disjuntas primas segue que há uma dedução de $B \vee C$. □

Agora podemos demonstrar o teorema seguinte. Esse teorema mostra que para premissas sem quantificadores o sistema original não é mais forte que o sistema para sentenças.

56. Teorema. [Teorema das premissas abertas]

Sejam Γ um estoque de fórmulas sem quantificadores e Γ' o estoque constituído por todas as instâncias fechadas de fórmulas de Γ obtidas pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios (incluindo substituições por nomes próprios novos). Se uma fórmula A é dedutível no sistema original a partir de Γ, então qualquer instância fechada A' de A obtida pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'.

Demonstração. Suponhamos que d é uma dedução no sistema original de A a partir de Γ. Vamos mostrar por indução no comprimento de d que qualquer sentença obtida a partir de A pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios quaisquer (novos ou não) é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'.

Passo base:

Se d tem comprimento 1, então A está em Γ ou é um axioma do terceiro excluído ou da substituição. Nesse caso, qualquer instância fechada de A está em Γ' ou é dedutível no sistema para sentenças, como vimos na seção 1.

Passo indutivo:

Se A é obtida a partir de uma fórmula anterior B em d pela aplicação da regra da expansão, então qualquer instância A' de A é obtida a partir de uma instância fechada coerente B' de B pela aplicação da regra das disjuntas. Por hipótese de indução, B' é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'. Concluímos que qualquer instância fechada de A é dedutível a partir de Γ' nesse caso. O mesmo pode ser concluido nos casos das regras da contração e da associatividade.

Suponha que A é obtida a partir de fórmulas anteriores B e C em d pela aplicação da regra do corte. Se A' é uma instância fechada qualquer de A e B' e C' são instâncias fechadas coerentes de B e C, então, por hipótese de indução, B' e C' são dedutíveis no sistema para sentenças a partir de Γ'. Observamos que Γ' é regular e que as sentenças em Γ' são livres de pronomes. Pelo teorema da eliminação parcial do corte, A' é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'.

Suponha que A é do tipo $\exists xB \to C$ e é obtida a partir de fórmula anterior do tipo $B \to C$ em d. Seja $\exists xB' \to C'$ uma instância fechada de A. Por hipótese de indução, qualquer instância fechada de $B \to C$ é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'. Em particular, $B'_x[t] \to C'$, em que t é um nome próprio novo, é dedutível no sistema para sentenças a partir de Γ'. Pela aplicação regra do existencial antecedente, concluímos que A' é dedutível, no sistema para sentenças, a partir de Γ'. $\square$

57. Exercício. Mostre que se Γ é estoque regular de sentenças e α é uma dedução no sistema para sentenças de uma sentença $A_x[t]$, em que t é nome próprio novo, a partir de Γ que satisfaz as condições (i) e (ii) enunciadas na demonstração do teorema da eliminação parcial do corte, então α pode ser transformada em uma dedução da sentença $A_x[u]$ a partir de Γ, que ainda satisfaz (i) e (ii), pela substituição de certas ocorrências de t por u.

4. O Primeiro Teorema Epsilon e o Teorema de Herbrand

Concluímos a seção anterior mostrando que uma fórmula A sem quantificadores é dedutível, no sistema original, a partir de um estoque Γ de fórmulas sem quantificadores se e somente se as sentenças A' obtidas a partir de A pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios são dedutíveis, no sistema para sentenças, a partir do estoque Γ' constituído por todas as sentenças obtidas a partir de fórmulas de Γ pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios. Vários teoremas fundamentais da lógica de primeira ordem podem ser obtidos a partir desse resultado. Os enunciados nesta seção dizem respeito ao sistema dedutivo original.

Dizemos que um estoque Γ de fórmulas sem quantificadores é fechado por substituição de pronomes se toda fórmula do tipo $B_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ está em Γ desde que a fórmula B esteja. A observação que segue a regra da generalização mostra que $B_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ é dedutível a partir de B, mas isso não implica que $B_{x_1,x_2,...}[y_1, y_2, ...]$ está em todo estoque de fórmulas que a fórmula B está. Contudo, isso implica que todo estoque de fórmulas pode ser estendido para um estoque de fórmulas fechado por substituição de pronomes e a partir do qual não se pode deduzir uma fórmula que não é dedutível a partir do estoque original.

O teorema a seguir mostra de que modo a parte livre de quantificadores do sistema dedutivo original para a lógica de primeira ordem é suficiente para o fragmento livre de quantificadores da linguagem. Explicitamos a definição seguinte antes de enunciar o teorema: Dizemos que uma fórmula A é consequência tautológica de Γ se A é consequência tautológica de alguma pluralidade finita de fórmulas de Γ.

58. Teorema. [Primeiro teorema epsilon]
Sejam A uma fórmula sem quantificadores e Γ um estoque de fórmulas sem quantificadores fechado por substituição de pronomes. A fórmula A é dedutível a partir de Γ (no sistema original) se e somente se A é consequência tautológica de Γ.

Demonstração. Suponhamos que A é dedutível, no sistema original, a partir de um estoque Γ de fórmulas sem quantificadores. Seja A' uma sentença obtida a partir de A pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios novos, tal que pronomes distintos são substituídos por nomes próprios novos distintos. Seja Γ' o estoque constituído por todas as sentenças obtidas a partir de fórmulas de Γ pela substituição uniforme das ocorrências livres de pronomes por nomes próprios quaisquer. Sabemos, pelo teorema das premissas abertas, que A' é dedutível a partir de Γ' no sistema para sentenças.

Pelo lema das linhas de dedução, há uma dedução d de A' a partir de Γ' no sistema para sentenças tal que cada ocorrência de sentença exceto a última é usada exatamente uma vez para concluir uma sentença posterior. A dedução d é livre de quantificadores. De fato, suponhamos que um quantificador ocorre em d. Um termo da sequência d em que há alguma ocorrência de quantificador não pode corresponder à conclusão, pois A' é livre de quantificadores. Portanto, qualquer termo de d que contém algum quantificador é usado como premissa de uma regra para concluir um termo posterior de d. Como nenhuma regra do sistema para sentenças permite concluir uma sentença sem quantificadores a partir de sentenças com quantificadores, temos que não pode haver o último termo com quantificador. Absurdo, pois d é uma sequência finita.

Temos uma dedução d de A' a partir de Γ' (no sistema para sentenças) tal que d é livre de quantificadores. Em particular, as regras do existencial antencedente e existencial consequente não ocorrem em d. Uma simples indução mostra que cada termo de d é consequência tautológica de Γ'. Portanto, A' é consequência tautológica de sentenças B'_1, B'_2, ... de Γ'. Agora podemos substituir de volta os nomes próprios novos de A' por pronomes, de modo a recuperar a fórmula A, e fazer uma substituição uniforme compatível em B_1', B_2', ... que troca de volta nomes próprios por pronomes, para obtermos fórmulas B_1, B_2, ... de Γ. Isso é possível pois Γ é fechado por substituição de pronomes. Como as operações lógicas não são afetadas por tais substituições, A é consequência tautológica de B_1, B_2, ..., como queríamos. □

Dizemos de um estoque de fórmulas Γ que Γ é tautologicamente consistente se para cada pluralidade finita B_1, B_2, ... de fórmulas de Γ há uma atribuição σ de valor de verdade para fórmulas atômicas e existenciais tal que todas as fórmulas B_1, B_2, ... são satisfeitas em σ.

O teorema a seguir, um corolário do primeiro teorema epsilon, elimina a quantificação do problema da consistência de um estoque de fórmulas sem quantificadores em lógica de primeira ordem. Isso pode ser usado para demonstrar finitariamente a consistência de algumas teorias matemáticas.

59. Teorema. [Teorema de Herbrand]

Se Γ é um estoque de fórmulas sem quantificadores fechado por substituição de pronomes, então Γ é consistente se e somente se Γ é tautologicamente consistente.

Demonstração. Se Γ não é tautologicamente consistente, então há uma pluralidade finita B_1, B_2, ... de fórmulas de Γ tal que, para qualquer atribuição σ de valor de verdade para fórmulas atômicas e existenciais, pelo menos uma das fórmulas B_1, B_2, ... não é satisfeita em σ. Disso segue que qualquer fórmula é consequência tautológica de B_1, B_2, ..., portanto de Γ, e Γ é inconsistente.

Se Γ é inconsistente, então qualquer fórmula livre de quantificadores do tipo $A \wedge \neg A$ é dedutível a partir de Γ. Do primeiro teorema epsilon temos que a conjunção $A \wedge \neg A$ é consequência tautológica de Γ. Isso significa que há uma pluralidade finita de fórmulas B_1, B_2, ... de Γ tal que toda atribuição de valor de verdade para fórmulas atômicas e existenciais que satisfaz todas as fórmulas B_1, B_2, ... também satisfaz $A \wedge \neg A$. Como nenhuma atribuição de valor de verdade satisfaz $A \wedge \neg A$, temos que nenhuma atribuição de valor de verdade satisfaz B_1, B_2, ..., e Γ não é tautologicamente consistente. □

60. Exercício. Seguindo a notação da demonstração do primeiro teorema epsilon, mostre por indução que cada termo de d é consequência tautológica de Γ'. Ainda com relação à demonstração do primeiro teorema epsilon, mostre que as fórmulas B_1, B_2, ... de Γ, obtidas a partir de B_1', B_2', ... por uma substituição apropriada de nomes próprios por pronomes, podem não coincidir com as fórmulas de Γ que deram origem à B_1', B_2', ..., mas que aquelas B_1, B_2, ... podem ser obtidas a partir dessas que deram origem à B_1', B_2' por uma substituição de pronomes.

5. Axiomas da Igualdade

Como aplicação dos resultados da seção anterior, consideremos o estoque Γ constituído pelos axiomas da igualdade para um símbolo de predicado binário R, definidos como segue: As fórmulas $R(x,x)$ e as fórmulas

$$(R(x_1,y_1)\wedge(R(x_2,y_2)\wedge(R(x_3,y_3)\wedge ...)))\to(Q(x_1,x_2,...)\to Q(y_1,y_2,...)),$$

em que o número de componentes atômicas no antecedente é a aridade de Q, para Q símbolo de predicado qualquer e x, x_1, y_1, x_2, y_2, ... pronomes quaisquer, são axiomas da igualdade para o símbolo R. Observamos que o estoque Γ constituído por tais fórmulas é fechado por substituição de pronomes.

Tanto $R(x,y)\to R(y,x)$ quanto $(R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z)$ podem ser deduzidas, no sistema original, a partir dos axiomas da igualdade:

61. Exemplo. [Simetria da igualdade]
(1) $(R(x,y)\wedge R(x,x))\to(R(x,x)\to R(y,x))$ (axioma da igualdade)
(2) $R(x,x)$ (axioma da igualdade)
(3) $R(x,y)\to R(y,x)$ (consequência tautológica de 1 e 2)

62. Exemplo. [Transitividade da igualdade]
(1) $(R(y,x)\wedge R(z,z))\to(R(y,z)\to R(x,z))$ (axioma da igualdade)
(2) $R(z,z)$ (axioma da igualdade)
(3) $R(x,y)\to R(y,x)$ (simetria da igualdade)
(4) $(R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z)$ (consequência tautológica de 1, 2 e 3)

Nos exemplos acima, a conclusão é sempre deduzida por consequência tautológica de axiomas da igualdade. Pelo primeiro teorema epsilon, esses casos são representativos de uma situação geral: Como o estoque Γ dos axiomas da igualdade é um estoque de fórmulas sem quantificadores fechado por substituição de pronomes, uma fórmula A sem quantificadores é dedutível a partir de Γ se e somente se A é consequência tautológica de Γ. Contudo, há fórmulas relevantes com quantificadores dedutíveis a partir dos axiomas da igualdade.

63. Teorema. [Teorema indiscernibilidade dos iguais]
Sejam A uma fórmula, x, y e z pronomes, R um símbolo de relação e Γ um estoque de fórmulas incluindo os axiomas da igualdade para R. A fórmula

$$R(x,y)\to(A_z[x]\leftrightarrow A_z[y])$$

é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. O resultado é mostrado por indução na complexidade de A.

Passo base:

Se A é uma fórmula atômica, então é da forma $Q(t_1,t_2,...)$. Para simplificar a notação, vamos supor que o símbolo Q possui aridade 3. O método da demonstração é perfeitamente geral, contudo. Com isso, podemos representar $A_z[x]$ e $A_z[y]$ por $Q(u_1, u_2, u_3)$ e $Q(v_1, v_2, v_3)$, respectivamente.

Sejam x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 pronomes novos, distintos entre si. Seja B o axioma

$$(R(x_1, y_1) \wedge (R(x_2, y_2) \wedge R(x_3, y_3))) \to (Q(x_1, x_2, x_3) \to Q(y_1, y_2, y_3)).$$

Pela regra de generalização, $\forall x_1 B$ é dedutível a partir de B. Como

$$\forall x_1 B \to B_{x_1}[u_1]$$

é dedutível, segue que $B_{x_1}[u_1]$ é dedutível a partir de B. Similarmente, $\forall y_1 B_{x_1}[u_1]$ é dedutível a partir de $B_{x_1}[u_1]$ e

$$\forall y_1 B_{x_1}[u_1] \to B_{x_1}[u_1]_{y_1}[v_1]$$

é dedutível. Temos, então, que $B_{x_1}[u_1]_{y_1}[v_1]$ é dedutível a partir de $B_{x_1}[u_1]$. Como y_1 não é u_1, segue que

$$B_{x_1}[u_1]_{y_1}[v_1] \text{ é } B_{x_1,y_1}[u_1, v_1],$$

e a última fórmula é dedutível a partir de B.

Como x_2 e y_2 não são u_1 ou v_1, o mesmo argumento pode ser usado para mostrar que $B_{x_1,y_1,x_2,y_2}[u_1, v_1, u_2, v_2]$ é dedutível a partir de $B_{x_1,y_1}[u_1, v_1]$, portanto dedutível a partir de B. Do mesmo modo,

$$B_{x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3}[u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]$$

é dedutível a partir de $B_{x_1,y_1,x_2,y_2}[u_1, v_1, u_2, v_2]$. Concluímos que

$$B_{x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3}[u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]$$

é dedutível a partir de B. Mas x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 são todos distintos entre si, portanto $B_{x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3}[u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]$ é

$$(R(u_1, v_1) \wedge (R(u_2, v_2) \wedge R(u_3, v_3))) \to (Q(u_1, u_2, u_3) \to Q(v_1, v_2, v_3)),$$

e essa fórmula é dedutível a partir do axioma B do estoque Γ.

Por definição, se t_1 é z, então u_1 é x e v_1 é y e se t_1 não é z, então u_1, v_1 e t_1 representam o mesmo nome. Similarmente para t_2, u_2 e v_2, e t_3, u_3 e v_3. Se t_1 é z, então $R(u_1, v_1)$ é $R(x, y)$. Se t_1 não é z, então $R(u_1, v_1)$ é $R(t_1, t_1)$, e é dedutível a partir do axioma $R(x_1, x_1)$. Em qualquer caso, $R(x, y) \to R(u_1, v_1)$ é dedutível a partir dos axiomas da igualdade, e o mesmo ocorre para $R(x, y) \to R(u_2, v_2)$ e para $R(x, y) \to R(u_3, v_3)$. Por consequência tautológica,

$$R(x, y) \to (R(u_1, v_1) \wedge (R(u_2, v_2) \wedge R(u_3, v_3)))$$

é dedutível a partir de Γ. Disso segue, pelo que foi mostrado acima, que

$$R(x, y) \to (Q(u_1, u_2, u_3) \to Q(v_1, v_2, v_3))$$

é dedutível a partir de Γ, como queríamos.

Mostramos que $R(x, y) \to (A_z[x] \to A_z[y])$ é dedutível a partir de Γ, para x, y e z pronomes quaisquer. Portanto,

$$R(y,x) \to (A_z[y] \to A_z[x])$$

também é dedutível a partir de Γ, para x, y e z pronomes quaisquer. Pela simetria da igualdade, $R(x,y) \to R(y,x)$ é dedutível a partir de Γ, para x e y pronomes quaisquer. Juntando tudo, por consequência tautológica temos que

$$R(x,y) \to (A_z[x] \leftrightarrow A_z[y])$$

é dedutível a partir de Γ, para x, y e z pronomes quaisquer.

Passo indutivo:

Suponhamos que A é $\neg B$ ou $B \vee C$ e que

$$R(x,y) \to (B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \text{ e } R(x,y) \to (C_z[x] \leftrightarrow C_z[y])$$

são dedutíveis a partir de Γ, para x, y e z pronomes quaisquer. Temos que

$$R(x,y) \to (A_z[x] \leftrightarrow A_z[y])$$

também é, por consequência tautológica, em ambos os casos, dedutível a partir de Γ.

Suponhamos que A é $\exists w B$. Como as subsitituições de z por x e z por y em A são permitidas por hipótese, w não é x ou y. A composição de uma dedução de $R(x,y) \to (B_z[x] \leftrightarrow B_z[y])$ a partir de Γ, dada pela hipótese de indução, com a dedução a seguir mostra que

$$R(x,y) \to (A_z[x] \leftrightarrow A_z[y])$$

é dedutível a partir de Γ.

(1) $R(x,y) \to (B_z[x] \leftrightarrow B_z[y])$ (premissa)
(2) $R(x,y) \to \forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y])$ (introdução do universal)
(3) $\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to (B_z[x] \leftrightarrow B_z[y])$ (teorema da substituição)
(4) $B_z[y] \to \exists w B_z[y]$ (axioma da substituição)
(5) $\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to (B_z[x] \to \exists w B_z[y])$ (consequência tautológica de 3 e 4)
(6) $B_z[x] \to (\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to \exists w B_z[y])$ (consequência tautológica de 5)
(7) $\exists w B_z[x] \to (\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to \exists w B_z[y])$ (introdução do existencial)
(8) $\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to (\exists w B_z[x] \to \exists w B_z[y])$ (consequência tautológica de 7)
(9) $B_z[x] \to \exists w B_z[x]$ (axioma da substituição)
(10) $\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to (B_z[y] \to \exists w B_z[x])$ (consequência tautológica de 3 e 9)
(11) $B_z[y] \to (\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to \exists w B_z[x])$ (consequência tautológica de 10)
(12) $\exists w B_z[y] \to (\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to \exists w B_z[x])$ (introdução do existencial)
(13) $\forall w(B_z[x] \leftrightarrow B_z[y]) \to (\exists w B_z[y] \to \exists w B_z[x])$ (consequência tautológica de 12)
(14) $R(x,y) \to (\exists w B_z[x] \leftrightarrow \exists w B_z[y])$ (consequência tautológica de 2, 8 e 13)

$\square$

Assumimos agora que o nome t e o pronome y são distintos de x.

64. Exemplo. [Eliminação dos nomes]

(1) $R(t,t) \wedge A_x[t] \to \exists x(R(x,t) \wedge A)$ (axioma da substituição)
(2) $R(t,t)$ (axioma da igualdade)
(3) $A_x[t] \to \exists x(R(x,t) \wedge A)$ (consequência tautológica de 1 e 2)
(4) $R(x,y) \to (A \to A_x[y])$ (indiscernibilidade dos iguais)
(5) $\forall y(R(x,y) \to (A \to A_x[y]))$ (regra da generalização)
(6) $\forall y(R(x,y) \to (A \to A_x[y])) \to (R(x,t) \to (A \to A_x[t]))$ (teorema da substituição)
(7) $(R(x,t) \wedge A) \to A_x[t]$ (consequência tautológica de 5 e 6)
(8) $\exists x(R(x,t) \wedge A) \to A_x[t]$ (introdução do existencial)
(9) $A_x[t] \leftrightarrow \exists x(R(x,t) \wedge A)$ (consequência tautológica de 3 e 8)

65. Exercício. Seguindo a notação da demonstração do teorema da indiscernibilidade dos iguais, refaça a demonstração do passo base usando indução. Basta mostrar que, para cada n maior ou igual a 1 e menor que a aridade de Q,

$$B_{x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}}[u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n,u_{n+1},v_{n+1}]$$

é dedutível a partir de $B_{x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n}[u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n]$.

6. Nomes Especiais e o Segundo Teorema Epsilon

Vamos considerar uma regra para quantificação existencial e predicação que é muito importante. É a passagem de uma sentença existencial do tipo $\exists xA$ para uma instância $A_x[t]$, em que t é um nome próprio novo. Essa passagem, que em linguagem natural diz que se alguma coisa é A, então podemos nomear propriamente tal coisa por t e predicar que t é A, não é assegurada pelos recursos do nosso sistema dedutivo original, que não deixa a linguagem da vez para introduzir um nome próprio novo. Mais ainda, é possível que $\exists xA$ seja dedutível a partir de um estoque de premissas sem que uma instância fechada $A_x[t]$ seja dedutível. Portanto, é de interesse estender nosso sistema dedutivo para garantir esse tipo de passagem e estudar o alcance dessa extensão obtida por meio de nomes próprios que serão chamados especiais.

Essa regra é, de fato, complementar em relação à passagem de uma instância qualquer do tipo $A_x[u]$ para a sentença existencial $\exists xA$, que já está garantida pelo axioma da substituição. Vamos demonstrar no teorema fundamental da teoria das deduções que essas duas regras básicas dão conta da lógica de primeira ordem, no sentido que essa extensão com quantificação e predicação do sistema de tautologias da lógica proposicional é obtida por essas duas regras. Vamos ver como fazer isso e, no caminho, demonstrar resultados que são de interesse independente como o segundo teorema epsilon.

Se queremos assegurar a passagem para uma instância fechada da sentença existencial $\exists xA$, então consideramos um nome próprio novo representado por $t_{\exists xA}$ e adicionamos a sentença $\exists xA \to A_x[t_{\exists xA}]$ ao estoque de premissas. Dizemos que $t_{\exists xA}$

é um nome próprio especial de nível 0 e que $\exists xA \rightarrow A_x[t_{\exists xA}]$ é o axioma especial para $t_{\exists xA}$. Podemos repetir o procedimento para garantir outras passagens do mesmo tipo, para outras instâncias fechadas de interesse.

Mesmo assim, isso resolve apenas parcialmente o problema porque ao considerar nomes próprios novos acrescentamos também novas fórmulas na linguagem, fórmulas com ocorrências desses nomes novos. Em particular, acrescentamos também novas sentenças existenciais, e para essas novas existenciais, com ocorrências de nomes próprios especiais de nível 0, a passagem para uma instância fechada não está assegurada.

Contudo, se queremos assegurar tal passagem para sentenças existenciais novas, podemos repetir o procedimento. Lembrando que sempre temos um estoque ilimitado de símbolos novos disponíveis, podemos, então, considerar um nome próprio novo representado por $t_{\exists yB}$ para a sentença existencial $\exists yB$, em que B contém ocorrências de nomes próprios especiais de nível 0, e adicionar o axioma especial $\exists yB \rightarrow B_y[t_{\exists yB}]$ ao estoque de premissas já ampliado. Dizemos que $t_{\exists yB}$ é um nome próprio especial de nível 1. Não há limite para repetir tal procedimento, podemos introduzir nomes próprios especiais de nível 2 e adicionar os axiomas especiais correspondentes, e assim sucessivamente até assegurar as passagens para instâncias fechadas que desejamos.

66. Observação. É importante observar que se $t_{\exists zC}$ é um nome próprio especial, então nenhum outro nome próprio especial de nível maior ou igual ao nível de $t_{\exists zC}$ ocorre em $\exists zC \rightarrow C_z[t_{\exists zC}]$. Para abreviar as formulações, preferimos a expressão "nome especial" em vez de "nome próprio especial".

O teorema a seguir mostra que a adição de axiomas especiais é conservativa, ou seja, que se uma fórmula sem ocorrências de nomes especiais é dedutível a partir de axiomas especiais e de outras premissas sem ocorrências de nomes especiais, então ela é dedutível a partir dessas premissas apenas.

67. Teorema. [Teorema da conservatividade dos axiomas especiais]
Sejam F uma fórmula sem ocorrências de nomes especiais e Γ um estoque de fórmulas também sem ocorrências de nomes especiais. F é dedutível a partir de Γ e de axiomas especiais $\exists xA \rightarrow A_x[t_{\exists xA}]$, $\exists yB \rightarrow B_y[t_{\exists yB}]$, $\exists zC \rightarrow C_z[t_{\exists zC}]$, ... se e somente se há uma dedução de F a partir de Γ sem ocorrências de nomes especiais.

Demonstração. Se F é dedutível a partir de Γ, então é imediato que F é dedutível, considerando os nomes especiais como nomes próprios novos acrescentados, a partir de Γ e de axiomas especiais. Precisamos demonstrar apenas a implicação conversa. Vamos mostrar como transformar uma dedução de F a partir de Γ e de axiomas especiais em uma dedução de F a partir de Γ apenas.

Suponha que F é dedutível a partir de Γ e de uma lista finita de axiomas especiais distintos $\exists xA \rightarrow A_x[t_{\exists xA}]$, $\exists yB \rightarrow B_y[t_{\exists yB}]$, $\exists zC \rightarrow C_z[t_{\exists zC}]$, ..., e que a sucessão finita $t_{\exists xA}$, $t_{\exists yB}$, $t_{\exists zC}$, ... já está arranjada de modo que o nível de $t_{\exists xA}$ é maior ou igual ao nível de $t_{\exists yB}$, que por sua vez é maior ou igual ao nível de $t_{\exists zC}$, e assim sucessivamente. Vamos representar esses axiomas especiais por A', B', C', ..., respectivamente. A suposição acima implica que $t_{\exists xA}$ pode ocorrer apenas no axioma especial A', que $t_{\exists yB}$ pode ocorrer apenas nos axiomas especiais A' e B', etc. Por aplicações sucessivas do teorema da dedução transformamos uma dedução de F a partir de Γ e de A', B', C', ... em uma dedução de

$$A' \to (B' \to (C' \to ... \to F)...)$$

a partir de Γ.

Podemos mostrar agora como produzir uma dedução da fórmula obtida pela eliminação de A' na implicação acima a partir de Γ. Primeiro, reescrevemos a implicação acima com o axioma especial A' detalhado:

$$(\exists xA \to A_x[t_{\exists xA}]) \to (B' \to (C' \to ... \to F)...)$$

O nome especial $t_{\exists xA}$ não ocorre em $(B' \to (C' \to ... \to F)...)$, pois é de nível máximo, nem em Γ. O teorema dos nomes próprios nos dá uma dedução livre de $t_{\exists xA}$ de

$$(\exists xA \to A_x[w]) \to (B' \to (C' \to ... \to F)...)$$

a partir de Γ, em que w é um pronome novo. Agora, como o pronome w não ocorre em $(B' \to (C' \to ... \to F)...)$, uma dedução de

$$\exists w(\exists xA \to A_x[w]) \to (B' \to (C' \to ... \to F)...)$$

a partir de Γ pode ser obtida por uma aplicação da regra da introdução do existencial.

Também temos a dedução abaixo da sentença $\exists w(\exists xA \to A_x[w])$:

(1) $A_x[w] \to (\exists xA \to A_x[w])$ (tautologia)
(2) $(\exists xA \to A_x[w]) \to \exists w(\exists xA \to A_x[w])$ (axioma da substituição)
(3) $A_x[w] \to \exists w(\exists xA \to A_x[w])$ (consequência tautológica de 1 e 2)
(4) $\exists w A_x[w] \to \exists w(\exists xA \to A_x[w])$ (introdução do existencial)
(5) $\neg\exists xA \to (\exists xA \to A_x[w])$ (tautologia)
(6) $\neg\exists xA \to \exists w(\exists xA \to A_x[w])$ (consequência tautológica de 2 e 5)
(7) $\exists w A_x[w] \leftrightarrow \exists xA$ (renomeação de pronomes ligados)
(8) $\exists w(\exists xA \to A_x[w])$ (consequência tautológica de 4, 6 e 7)

Das duas deduções acima obtemos uma dedução de

$$(B' \to (C' \to ... \to F)...)$$

a partir de Γ por uma aplicação da regra de *modus ponens*.

Esse procedimento de eliminação pode ser aplicado novamente para B', C', ..., em sequência, até produzir uma dedução de F a partir de Γ sem ocorrências de nomes especiais. □

Seja Γ um estoque de fórmulas sem ocorrências de nomes especiais que inclui os axiomas da igualdade para um símbolo de relação representado por $=$. Vimos que ampliar Γ com axiomas especiais não altera as fórmulas sem nomes especiais dedutíveis usando os recursos dados de início apenas.

Contudo, a passagem de uma sentença existencial $\exists xA$ para a instância $A_x[t_{\exists xA}]$ não é o único recurso adicional de interesse nesse contexto. É razoável supor também que se A e A' são equivalentes, então que $t_{\exists xA} = t_{\exists xA'}$, ou seja, é de interesse considerar o que acontece se Γ for ampliado com axiomas especiais e com sentenças do tipo $\forall x(A \leftrightarrow A') \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA'}$, em que $t_{\exists xA}$ e $t_{\exists xA'}$ são nomes especiais já introduzidos. As sentenças desse tipo são chamadas de axiomas da igualdade especiais. Não estão excluídos os axiomas da igualdade especiais triviais do tipo $\forall x(A \leftrightarrow A) \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA}$. Nesse caso os axiomas são dedutíveis a partir dos axiomas da igualdade do tipo $t_{\exists xA} = t_{\exists xA}$.

O segundo teorema epsilon garante que o uso de axiomas especiais e de axiomas da igualdade especiais não altera o sistema original no que se refere às fórmulas sem nomes especiais.

68. Teorema. [Segundo teorema epsilon]

Sejam F uma fórmula sem ocorrências de nomes especiais e Γ um estoque de fórmulas também sem ocorrências de nomes especiais. F é dedutível a partir de Γ, de axiomas especiais e de axiomas da igualdade especiais se e somente se há uma dedução de F a partir de Γ sem ocorrências de nomes especiais.

Demonstração. Se F é dedutível a partir de Γ, então é imediato que F é dedutível, considerando os nomes especiais como nomes próprios novos acrescentados, a partir de Γ ampliado com axiomas especiais e axiomas da igualdade especiais. Precisamos demonstrar apenas a implicação conversa.

Suponha que d é uma dedução de F a partir do estoque Γ ampliado com axiomas especiais e axiomas da igualdade especiais e que t, u, v, ... é a lista finita de todos nomes especiais que ocorrem em d. Cada nome especial na lista t, u, v, ... corresponde a um axioma especial e a alguns axiomas da igualdade especiais que, supomos, foram adicionados a Γ. Vamos supor, ainda, que o nível de t é maior ou igual ao nível de u, que é maior ou igual ao nível de v, e assim sucessivamente. Queremos mostrar como obter a partir de d uma dedução de F que não usa o axioma especial para t nem os axiomas especiais da igualdade com ocorrências t.

Sejam

$$\forall x(A \leftrightarrow A') \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA'},\ \forall y(B \leftrightarrow B') \to t_{\exists yB} = t_{\exists yB'},$$
$$\forall z(C \leftrightarrow C') \to t_{\exists zC} = t_{\exists zC'},\ ...$$

os axiomas da igualdade especiais com ocorrências de t que são usados em d. Vamos representar esses axiomas por A_1, B_1, C_1, ..., notação que será usada na parte final da demonstração. Observamos que, como o nível de t é máximo entre os nomes especiais que ocorrem em d, apenas o consequente desses axiomas tem ocorrências de t.

Considere o axioma $\forall x(A \leftrightarrow A') \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA'}$. Se esse axioma é trivial, então ele é dedutível a partir de axiomas da igualdade e pode ser eliminado. Se o axioma não é trivial, então apenas um entre $t_{\exists xA}$ e $t_{\exists xA'}$ é t, e vamos supor que é $t_{\exists xA}$. Se t é $t_{\exists xA'}$, podemos alterar d substituindo o axioma

$$\forall x(A \leftrightarrow A') \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA'}$$

pelo axioma

$$\forall x(A' \leftrightarrow A) \to t_{\exists xA'} = t_{\exists xA},$$

já que cada um desses axiomas pode ser deduzido a partir do outro e de Γ, e nos preocuparmos apenas com a eliminação desse último, como segue. Analogamente para todos os outros axiomas da igualdade especiais da lista acima.

Dessas suposições segue que o axioma especial para t é $\exists xA \to A_x[t_{\exists xA}]$, e também é $\exists yB \to B_y[t_{\exists yB}]$, ..., que x, y, ... representam o mesmo pronome e que A, B, ... representam a mesma fórmula. Vamos mostrar que todos os axiomas da igualdade especiais com ocorrências de t acima são dedutíveis a partir do estoque Π que é Γ ampliado com axiomas especiais para nomes especiais distintos de t, com axiomas da igualdade especiais sem ocorrências de t e com $\forall x(A \leftrightarrow A')$ e $t = t_{\exists xA'}$.

De fato, o axioma da igualdade especial $\forall x(A \leftrightarrow A') \to t_{\exists xA} = t_{\exists xA'}$ é dedutível a partir de $\forall x(A \leftrightarrow A')$ e $t = t_{\exists xA'}$, por consequência tautológica. O axioma especial para t também é dedutível a partir de Π. Para mostrar isso, primeiro deduzimos $A \leftrightarrow A'$ e $A_x[t] \leftrightarrow A'_x[t]$ a partir de $\forall x(A \leftrightarrow A')$ pelo teorema da substituição. Depois deduzimos $A'_x[t] \leftrightarrow A'_x[t_{\exists xA'}]$ a partir de $t = t_{\exists xA'}$ seguindo o teorema da indiscernibilidade dos iguais. Agora deduzimos $\exists xA \leftrightarrow \exists xA'$ a partir de $A \leftrightarrow A'$ pelo teorema da substituição de equivalentes, e $A_x[t] \leftrightarrow A'_x[t_{\exists xA'}]$ a partir de $A_x[t] \leftrightarrow A'_x[t]$ e $A'_x[t] \leftrightarrow A'_x[t_{\exists xA'}]$ por consequência tautológica. Para finalizar, concluímos por consequência tautológica o axioma especial $\exists xA \to A_x[t]$ a partir do axioma especial $\exists xA' \to A'_x[t_{\exists xA'}]$, que está em Π, pois t não é $t_{\exists xA'}$ e não ocorre em A'.

Os outros axiomas da igualdade especiais com ocorrências de t também são dedutíveis a partir de Π. Vejamos o caso de $\forall y(B \leftrightarrow B') \to t_{\exists yB} = t_{\exists yB'}$. Vamos assumir como premissa o antecedente $\forall y(B \leftrightarrow B')$ para deduzir o consequente, que é $t = t_{\exists yB'}$, a partir de Π. Sabemos que t não ocorre no axioma da igualdade especial $\forall x(A' \leftrightarrow B') \to t_{\exists xA'} = t_{\exists xB'}$ que, portanto, está em Π. Pelo teorema da substituição de equivalentes aplicado à fórmula $B \leftrightarrow B'$, deduzida a partir da premissa, e a esse axioma da igualdade especial sem ocorrências de t, temos que $\forall x(A' \leftrightarrow B) \to t_{\exists xA'} = t_{\exists xB'}$. Como B é A e $\forall x(A \leftrightarrow A')$ está em Π, temos $t_{\exists xA'} = t_{\exists xB'}$, usando novamente o teorema da substituição de equivalentes e *modus ponens*. Agora, usamos que $t = t_{\exists xA'}$ está em Π e a transitividade da igualdade para concluir que $t = t_{\exists yB'}$, como queríamos. Pelo teorema da dedução, $\forall y(B \leftrightarrow B') \to t_{\exists yB} = t_{\exists yB'}$ é dedutível a partir de Π.

Os outros axiomas da igualdade especiais são tratados do mesmo modo e todos são dedutíveis a partir de Π. Concluímos que d pode ser transformada em uma dedução de F a partir de Π. Por duas aplicações do teorema da dedução, temos uma dedução de

$$t = t_{\exists xA'} \to (\forall x(A \leftrightarrow A') \to F)$$

a partir de Γ ampliado com axiomas especiais sem ocorrências de t e com axiomas da igualdade especiais também sem ocorrências de t. Pelo teorema dos nomes próprios temos uma dedução de $w = t_{\exists xA'} \rightarrow (\forall x(A \leftrightarrow A') \rightarrow F)$ a partir desse mesmo estoque de fórmulas sem ocorrências de t, em que w é um pronome novo.

Com o teorema da substituição podemos transformar essa dedução em uma dedução de $t_{\exists xA'} = t_{\exists xA'} \rightarrow (\forall x(A \leftrightarrow A') \rightarrow F)$, substituindo w por $t_{\exists xA'}$, que, por sua vez, pode ser transformada em uma dedução de $\forall x(A \leftrightarrow A') \rightarrow F$ a partir do mesmo estoque sem ocorrências de t. Mas, $\neg A_1 \rightarrow F$ é consequência tautológica de $\forall x(A \leftrightarrow A') \rightarrow F$, portanto temos uma dedução de $\neg A_1 \rightarrow F$ a partir do mesmo estoque.

Usando o teorema da dedução, a partir da dedução d temos uma dedução da fórmula $A_1 \rightarrow (B_1 \rightarrow (C_1 \rightarrow (... \rightarrow F)...))$ a partir de Γ ampliado com axiomas especiais, incluindo o axioma especial para t, e com axiomas da igualdade especiais sem ocorrências de t. Como vimos acima, temos uma dedução de $\neg A_1 \rightarrow F$ a partir de um estoque menor que esse, sem ocorrências de t. Por consequência tautológica, temos uma dedução de $B_1 \rightarrow (C_1 \rightarrow (... \rightarrow F)...)$ a partir de Γ ampliado com axiomas especiais, incluindo o axioma especial para t, e com axiomas da igualdade especiais sem ocorrências de t.

Similarmente, eliminamos B_1, C_1, ... e chegamos a uma dedução de F a partir de Γ ampliado com axiomas especiais, incluindo o axioma especial para t, e com axiomas da igualdade especiais sem ocorrências de t. Pelo teorema da conservatividade dos axiomas especiais, podemos eliminar o axioma especial para t e chegar a uma dedução de F a partir de Γ ampliado com axiomas especiais sem ocorrências de t e com axiomas da igualdade especiais sem ocorrências de t. Portanto, t e seus axiomas foram eliminados. Agora o procedimento pode ser aplicado para u, v, ... sucessivamente até alcançar uma dedução de F a partir de Γ apenas. $\square$

69. Exercício. Suponha que Γ inclui apenas uma fórmula do tipo $\exists xP(x)$. Mostre que não é possível deduzir $P(t)$ a partir de Γ. Para isso, mostre primeiro que se $P(t)$ pode ser deduzida a partir de Γ, então $\exists xP(x) \rightarrow P(t)$ e, consequentemente, $\neg P(x) \vee P(t)$ são dedutíveis. Mostre, usando o primeiro teorema epsilon, que $\neg P(x) \vee P(t)$ não é dedutível.

7. Caracterização das Sentenças Dedutíveis

O teorema a seguir caracteriza as sentenças dedutíveis no sistema original para a lógica de primeira ordem em termos das regras complementares para quantificação existencial e predicação garantidas pelos axiomas da substituição e axiomas especiais. Trata-se, também, de medir quanto a lógica de primeira ordem extende dedutivamente a lógica proposicional, mostrando que essa extensão é obtida exatamente pela adição dessas duas regras. Nossa demonstração usa o sistema para sentenças introduzido na seção 1 deste capítulo, de modo que há nela uma mescla do uso de nomes próprios novos com o uso de nomes especiais. Contudo, queremos, no final, ficar apenas com nomes especiais, eliminando nomes próprios novos que não ocorrem nas sentenças que queremos caracterizar. Por isso a observação a seguir é relevante.

70. Observação. Sejam dados um estoque finito de nomes especiais e alguns outros nomes próprios novos que não são especiais. Há um estoque ilimitado de sentenças existenciais que não estão associadas a nenhum nome especial do estoque finito dado e sem ocorrências de nomes próprios novos. Portanto, podemos estipular uma sentença existencial desse tipo para cada nome próprio novo dado de modo que esses sejam os nomes especiais correspondentes.

71. Teorema. [Teorema fundamental da teoria das deduções]
Uma sentença F sem nomes especiais é dedutível se e somente se F é consequência tautológica de um estoque (finito) Δ de axiomas especiais e de instâncias fechadas de axiomas de substituição, possivelmente com ocorrências de nomes próprios novos, com a seguinte propriedade adicional: Se uma sentença $D_x[t] \to \exists x D$ ou $\exists x D \to D_x[t]$ está em Δ, então $\exists x D$ é instância fechada de uma subfórmula de F. Além disso, todos os nomes próprios novos que ocorrem em Δ são nomes especiais.

Demonstração. Sejam F e Δ nas condições no enunciado. Consideramos os nomes especiais que ocorrem em Δ como nomes próprios novos. Como F é consequência tautológica de Δ, temos que, em particular, F é dedutível, considerando apenas os símbolos que ocorrem em F e em Δ, a partir de Δ. Mas Δ é um estoque de instâncias fechadas de axiomas da substituição na linguagem de F expandida com nomes próprios novos e de axiomas especiais. Se consideramos a linguagem de F expandida com os nomes próprios novos, qualquer instância de um axioma da substituição que está em Δ é ela própria um axioma da substituição. Portanto, F é dedutível a partir de axiomas especiais apenas. Pelo teorema da conservatividade, há uma dedução de F no sistema original e sem ocorrências de nomes especiais ou de qualquer símbolo que não ocorre em F.

Suponha que F é dedutível (no sistema original). Pelo teorema das premissas abertas, há uma dedução d de F no sistema para sentenças. Vamos demonstrar por indução no comprimento de d que há um estoque Δ com as propriedades desejadas.

Passo base:

Se d tem comprimento 1, então F é do tipo $\neg A \vee A$ em que A é sentença atômica. Nesse caso F é tautologia e podemos estipular o estoque vazio para Δ.

Passo indutivo:

Suponha que d tem comprimento maior que 1 e F é obtida em d pela aplicação de uma regra de inferência. Se F foi obtida pela aplicação da regra das disjuntas primas ou da regra da introdução da dupla negação, temos que F foi obtida a partir de uma sentença G para a qual podemos supor, como hipótese de indução, que há um estoque Δ_G com as propriedades desejadas. Como nos dois casos F é consequência tautológica de G, ela é também consequência tautológica de Δ_G. Temos ainda, nesses casos, que se uma sentença do tipo $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de G, então ela também é instância de uma subfórmula de F. De fato, como $\exists xD$ não é uma disjunção, se ela é instância de uma subfórmula de G, então ela é instância de uma subfórmula de alguma disjunta prima de G. Mas toda disjunta prima de G é uma subfórmula de F nesses dois casos, como é imediato verificar. Portanto, como uma subfórmula de uma subfórmula de F é uma sufórmula de F, temos que Δ_G é um estoque com as propriedades desejadas para F e para G.

Suponha que F foi obtida pela aplicação da regra da prova por casos a partir de duas sentenças G e H anteriores em d, para as quais podemos supor, como hipótese de indução, que há dois estoques, Δ_G e Δ_H, com as propriedades desejadas para G e H, respectivamente. Se Δ é a reunião desses estoques, então F é consequência tautológica de Δ, pois F é consequência tautológica de G e H nesse caso. Além disso, F é do tipo $\neg(A \vee B) \vee C$, e podemos dizer que G é do tipo $\neg A \vee C$ e H é do tipo $\neg B \vee C$. Como $\exists xD$ não é uma disjunção nem uma negação, segue que se $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de G ou de H, então é instância de uma subfórmula de A, de B ou de C. Em qualquer caso, $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de F e Δ tem as propriedades desejadas para F.

Suponha que F foi obtida pela aplicação da regra fraca do corte a partir de duas sentenças G e H anteriores em d, para as quais podemos supor, como hipótese de indução, que há dois estoques, Δ_G e Δ_H, com as propriedades desejadas para G e H, respectivamente. Se Δ é a reunião desses estoques, então F é consequência tautológica de Δ, pois F é consequência tautológica de G e H nesse caso. Além disso, F é fórmula do tipo $B \vee C$, e podemos dizer que G é do tipo $A \vee B$ e H é do tipo $\neg A \vee B$, em que A é livre de pronomes. Como $\exists xD$ não é uma disjunção nem uma negação, segue que se $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de G ou de H, então é instância de uma subfórmula de A, de B ou de C. Como A é livre de pronomes, $\exists xD$ não é instância de uma subfórmula de A, portanto é instância de uma subfórmula de F e Δ tem as propriedades desejadas para F.

Se F foi obtida pela aplicação da regra do existencial antecedente, então F foi obtida a partir de uma sentença G para a qual podemos supor, como hipótese de indução, que há um estoque Δ_G com as propriedades desejadas. Nesse caso F é do tipo $\neg\exists yA \vee B$ e G é do tipo $\neg A_y[u] \vee B$, em que u é nome próprio novo que não ocorre em F. Como u não ocorre em $\exists yA$, podemos estipular que u é o nome especial para essa sentença. Pela observação 70, podemos estipular também que qualquer outro nome próprio novo que ocorre em $\exists yA$ é o nome especial para alguma sentença, sem conflito com as sentenças correspondentes aos nomes especiais do estoque finito Δ_G. Assim, podemos acrescentar o axioma especial $\exists yA \to A_y[u]$ ao estoque Δ_G, o que resulta em Δ. É imediato verificar que F é consequência tautológica do axioma especial $\exists yA \to A_y[u]$ e de G, portanto de Δ. Resta mostrar que Δ possui a propriedade adicional. De fato, se $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de $\neg A_y[u] \vee B$, então $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de $A_y[u]$ ou de B, que, por sua vez, são instâncias de subfórmulas de $\neg\exists yA \vee B$. Concluímos que todas as sentenças do estoque Δ que estão no estoque Δ_G satisfazem a propriedade adicional. Essa propriedade também é satisfeita pelo axioma especial $\exists yA \to A_y[u]$, portanto por todas as sentenças em Δ.

Se F foi obtida pela aplicação da regra do existencial consequente, então F foi obtida a partir de uma sentença G para a qual podemos supor, como hipótese de indução, que há um estoque Δ_G com as propriedades desejadas. Nesse caso F é do tipo $\exists yA \vee B$ e G é do tipo $A_y[u] \vee B$. Novamente pela observação 70, podemos estipular que todos os nomes próprios novos que ocorrem em $A_y[u]$ são nomes especiais para alguma sentença, sem conflito com as sentenças correspondentes aos nomes especiais do estoque finito Δ_G. Podemos acrescentar a instância fechada do axioma da substituição $A_y[u] \to \exists yA$ ao estoque Δ_G, o que resulta em Δ. É imediato verificar que F é consequência tautológica de G e de $A_y[u] \to \exists yA$, portanto de Δ. Resta mostrar que Δ possui a propriedade adicional. De fato, se $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de $A_y[u] \vee B$, então $\exists xD$ é instância de uma subfórmula de $A_y[u]$ ou de B, que, por sua vez, são instâncias de subfórmulas de $\exists yA \vee B$. Concluímos que todas as sentenças do estoque Δ que estão no estoque Δ_G satisfazem a propriedade adicional. Essa propriedade também é satisfeita por $A_y[u] \to \exists yA$, portanto por todas as sentenças em Δ. □

72. COROLÁRIO. *Se F é uma sentença dedutível, então há uma dedução de F sem ocorrências de símbolos que não ocorrem em F.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que F é dedutível usando símbolos que não ocorrem em F. Pela implicação direta do teorema fundamental, F é consequência tautológica de um estoque de sentenças Δ tal que se um símbolo ocorre em um sentença que está em Δ, então ele ocorre em F ou é um nome especial. Agora, pela implicação conversa do teorema fundamental, há uma dedução de F sem ocorrências de símbolos que não ocorrem em F. □

73. EXERCÍCIO. Seja $\exists xA$ uma sentença, em que A é uma fórmula aberta. Demonstre, a partir do teorema fundamental da teoria das deduções, que $\exists xA$ é dedutível se e somente se alguma disjunção de instâncias do tipo

$$A_x[t] \vee (A_x[u] \vee (A_x[v] \vee ...)...),$$

em que t, u, v, ... são nomes não necessariamente novos, é uma tautologia. Mostre que $\exists x(P(x,a) \vee \neg P(b,x))$ é dedutível exibindo uma disjunção de duas instâncias de $P(x,a) \vee \neg P(b,x)$ que é uma tautologia, mas observe que se a e b são distintos, então nenhuma instância de $P(x,a) \vee \neg P(b,x)$ é uma tautologia.

CAPíTULO 4

Incompletude e Indefinibilidade

1. O Teorema do Ponto Fixo e o Teorema de Löb

Suponha que cada uma das fórmulas que estamos considerando, a partir de algum estoque de símbolos, está associada a um nome próprio, do mesmo estoque, de modo unívoco. Ou seja, assuma que uma nomeação das fórmulas é fixada. Em linguagem natural, por exemplo, associamos um nome próprio a cada frase simplesmente colocando a frase entre aspas. Através desse expediente, que transforma uma frase qualquer em um nome próprio de si, podemos fazer menção às frases. Do mesmo modo para as fórmulas. Se A é uma fórmula, então $\ulcorner A \urcorner$ representa seu nome próprio associado.

Considere x um pronome. Se A é uma fórmula, dizemos que a fórmula $A_x[\ulcorner A \urcorner]$ é a diagonalização de A. A diagonalização é uma operação sintática que se aplica a qualquer fórmula.

74. Observação. Não exigimos qualquer ocorrência de x em A para formar a diagonalização de A. O pronome x usado na definição de diagonalização é o mesmo para todas as fórmulas A. Como a diagonalização de A é uma fórmula, a ela está associado um nome próprio representado por $\ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner$.

Seja Γ um estoque de fórmulas com axiomas da igualdade para um símbolo de relação representado por $=$. Considere z e w pronomes distintos e D uma fórmula. Dizemos que D com z e w representa em Γ a operação de diagonalização se e somente se

$$\forall w(D_z[\ulcorner A \urcorner] \leftrightarrow w = \ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner)$$

é dedutível a partir de Γ, para cada fórmula A.

75. Observação. Pela eliminação dos nomes, a diagonalização de A é dedutivamente equivalente à fórmula $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \wedge A)$.

76. Teorema. [Teorema do ponto fixo]
Sejam Γ um estoque de fórmulas com os axiomas da igualdade e y um pronome distinto de x. Suponha que há uma fórmula D tal que D com x e y representa em Γ a diagonalização. Seja C uma fórmula tal que y ocorre livre em C e nenhum outro pronome ocorre livre em C. Então existe uma sentença B tal que a equivalência $C_y[\ulcorner B \urcorner] \leftrightarrow B$ é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. Uma sentença com a propriedade enunciada é chamada de ponto fixo para C. Vamos encontrar um ponto fixo para C que é a diagonalização de uma fórmula A, ou seja, vamos buscar uma B do tipo $A_x[\ulcorner A \urcorner]$. Para encontrar tal sentença procedemos primeiro como se fosse possível resolver o problema para ver como seria a solução. Depois verificamos que uma solução realmente foi encontrada desse modo.

Suponha que seja possível encontrar uma sentença B tal como requerido. Nesse caso, $C_y[\ulcorner B \urcorner]$ é dedutivamente equivalente a $\exists y(y = \ulcorner B \urcorner \wedge C)$ pela eliminação dos nomes. Estamos supondo que B é do tipo $A_x[\ulcorner A \urcorner]$. Logo, $\exists y(y = \ulcorner B \urcorner \wedge C)$ é $\exists y(y = \ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner \wedge C)$. Agora, pela substituição de equivalentes, podemos substituir $y = \ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner$ por $D_x[\ulcorner A \urcorner]$, já que D com x e y representa a diagonalização em Γ. Isso resulta na sentença $\exists y(D_x[\ulcorner A \urcorner] \wedge C)$, cuja equivalência com as anteriores é dedutível a partir de Γ. Se estipulamos que A é $\exists y(D \wedge C)$, então a sentença anterior é a diagonalização de A e deve ser a B que procuramos.

Vamos definir B como a diagonalização de $\exists y(D \wedge C)$ e retroagir os passos acima para deduzir $C_y[\ulcorner B \urcorner] \leftrightarrow B$ a partir de Γ. Vamos representar $\exists y(D \wedge C)$ por A para abreviar a escrita. É importante ter em mente que B é $A_x[\ulcorner A \urcorner]$. A sequência abaixo mostra uma dedução apropriada. Como usual, escrevemos ao lado da fórmula uma breve explicação de como ela é obtida na sequência. A terceira fórmula, por exemplo, é obtida por substituição de equivalentes a partir da equivalência dada na segunda fórmula.

(1) $B \leftrightarrow \exists y(D_x[\ulcorner A \urcorner] \wedge C)$ (definição de B)

(2) $\forall y(D_x[\ulcorner A \urcorner] \leftrightarrow y = \ulcorner B \urcorner)$ (representação da diagonalização)

(3) $\exists y(D_x[\ulcorner A \urcorner] \wedge C) \leftrightarrow \exists y(y = \ulcorner B \urcorner \wedge C)$ (substituição)

(4) $\exists y(y = \ulcorner B \urcorner \wedge C) \leftrightarrow C_y[\ulcorner B \urcorner]$ (eliminação dos nomes)

(5) $C_y[\ulcorner B \urcorner] \leftrightarrow B$ (consequência tautológica de 1, 3 e 4)

Portanto B é um ponto fixo para C e a demonstração está completa. □

Na próxima seção aplicamos o teorema do ponto fixo para demonstrar a indefinibilidade das sentenças dedutíveis. Agora, vamos ao Teorema de Löb. Sejam P uma fórmula, Γ um estoque de fórmulas e y um pronome distinto de x tais que y ocorre livre em P e nenhum outro pronome ocorre livre em P. Dizemos que, com a nomeação dada, P é uma fórmula de dedutibilidade em Γ se e somente se as condições abaixo são satisfeitas para quaisquer fórmulas A e B.

(1) Se A é dedutível a partir de Γ, então $P_y[\ulcorner A \urcorner]$ também o é.

(2) $P_y[\ulcorner A \urcorner] \to P_y[\ulcorner P_y[\ulcorner A \urcorner] \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ.

(3) $P_y[\ulcorner A \to B \urcorner] \to (P_y[\ulcorner A \urcorner] \to P_y[\ulcorner B \urcorner])$ é dedutível a partir de Γ.

Se a fórmula $P_y[\ulcorner A \urcorner]$ for lida como "A é dedutível a partir de Γ", então as condições podem ser entendidas assim: (1) Diz que se A é dedutível a partir de Γ, então "A é dedutível a partir de Γ" também é dedutível a partir de Γ. A condição (2) é a formalização da condição (1) como um esquema de sentenças dedutíveis a partir de Γ e (3) corresponde à regra de *modus ponens* para P, também formalizada como um esquema de sentenças dedutíveis a partir Γ. Contudo, não estamos dizendo que, com a nomeação dada para as fórmulas, P define o predicado metamatemático de dedutibilidade em Γ. Como veremos no teorema de Gödel-Tarski, isso não pode ocorrer se Γ for consistente e representar a diagonalização com a nomeação das fórmulas fixada.

77. Teorema. [Teorema de Löb]
Sejam Γ um estoque nas condições do teorema do ponto fixo e P uma fórmula de dedutibilidade em Γ. Seja A uma sentença qualquer. Desse modo, $P_y[\ulcorner A \urcorner] \to A$ é dedutível a partir de Γ se e somente se A é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. Se A é dedutível a partir de Γ, então $P_y[\ulcorner A \urcorner] \to A$ também é por consequência tautológica. A parte não-trivial do teorema é a implicação direta, e a conclusão pode ser entendida como afirmando que as intâncias da correção de P interna a Γ que são afirmadas em Γ são apenas aquelas correspondentes às sentenças dedutíveis a partir de Γ.

O ponto chave da demonstração é a consideração de uma sentença que pode ser lida como "se eu sou dedutível então A", ou seja, uma sentença B tal que

$$B \leftrightarrow (P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A) \text{ é dedutível em } \Gamma.$$

O teorema do ponto fixo garante que existe uma sentença desse tipo. Consideremos uma tal sentença, representada por B.

A sentença $B \to (P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A)$ é dedutível a partir de Γ, pela escolha de B. Pela condição (1) sobre P, temos que $P_y[\ulcorner B \to (P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A) \urcorner]$ também o é, assim como $P_y[\ulcorner B \urcorner] \to P_y[\ulcorner P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A \urcorner]$ pela condição (3). Ainda pela condição (3), a sentença

$$P_y[\ulcorner B \urcorner] \to (P_y[\ulcorner P_y[\ulcorner B \urcorner] \urcorner] \to P_y[\ulcorner A \urcorner])$$

é dedutivel. Podemos, usando a condição (2) e consequência tautológica, eliminar o termo do meio, pois o mesmo já é implicado pelo antecedente em Γ. Portanto, a sentença $P_y[\ulcorner B \urcorner] \to P_y[\ulcorner A \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ.

A partir da conclusão do parágrafo anterior e da hipótese que $P_y[\ulcorner A \urcorner] \to A$ é dedutível a partir de Γ, concluímos, por consequência tautológica, que $P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A$ também é dedutível. Agora, por um lado, $P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A$ é dedutivamente equivalente a B, donde B e, pela condição (1), $P_y[\ulcorner B \urcorner]$ são dedutíveis a partir de Γ. Por outro lado, $B \to (P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A)$ também é dedutível, pela própria escolha do ponto fixo B. Como A é consequência tautológica de B, $P_y[\ulcorner B \urcorner]$ e $B \to (P_y[\ulcorner B \urcorner] \to A)$, temos que A é dedutível a partir de Γ. □

Os resultados acima enunciados e demonstrados permitem formular de modo abstrato os famosos teoremas de Gödel, como está mostrado na seção seguinte. Conseguimos com isso condições bastante gerais para aplicabilidade dos teoremas a partir de uma nomeação das fórmulas. É importante ressaltar que a possibilidade de representar em um estoque Γ a operação de diagonalização depende não apenas de Γ, mas também da nomeação subjacente.

78. Exercício. Sejam x e y pronomes e Γ um estoque de fórmulas como acima. Mostre que se D com z e w, pronomes distintos, representa em Γ a diagonalização, então $D_{z,w}[x, y]$ com x e y também representa a diagonalização. Portanto, se alguma fórmula com dois pronomes quaisquer representa a diagonalização, então alguma fórmula com x e y também representa.

2. O Teorema de Gödel-Tarski e o Segundo Teorema de Gödel

Continuamos com a suposição que cada fórmula da vez está associada a um nome próprio, representado por $\ulcorner A \urcorner$ quando a fórmula correspondente é A. Sejam Γ um estoque de fórmulas, C uma fórmula e y um pronome tais que y é o único pronome que ocorre livre em C. Dizemos que C com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ se e somente se para cada sentença A, (i) se A é dedutível a partir de Γ, então $C_y[\ulcorner A \urcorner]$ também é dedutível a partir de Γ e (ii) se A não é dedutível a partir de Γ, então $\neg C_y[\ulcorner A \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ. Novamente, a possibilidade de definir em Γ a dedutibilidade a partir de Γ depende não apenas de Γ, mas também da nomeação subjacente.

79. Teorema. [Teorema de Gödel-Tarski]
Seja Γ um estoque de fórmulas com os axiomas da igualdade. Suponha que há uma fórmula D tal que D com x e y representa em Γ a diagonalização. Suponha ainda que há uma fórmula C tal que C com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ. Então Γ é inconsistente, ou seja, qualquer fórmula é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. A aplicação do teorema do ponto fixo para a fórmula $\neg C$ dá uma sentença B tal que $B \leftrightarrow \neg C_y[\ulcorner B \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ.

Suponha que B não seja dedutível a partir de Γ. Como C com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ, segue que $\neg C_y[\ulcorner B \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ. Mas há uma dedução de $B \leftrightarrow \neg C_y[\ulcorner B \urcorner]$ a partir de Γ, portanto B é dedutível a partir de Γ.

Concluímos que B é dedutível a partir de Γ. Nesse caso $\neg C_y[\ulcorner B \urcorner]$ também é. Como C com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ e B é dedutível, segue que $C_y[\ulcorner B \urcorner]$ também é. Portanto, Γ é inconsistente já que qualquer fórmula A é consequência tautológica de $C_y[\ulcorner B \urcorner]$ e $\neg C_y[\ulcorner B \urcorner]$. $\square$

80. Observação. Mostramos no segundo parágrafo da demonstração acima que se B não é dedutível a partir de Γ, então B é dedutível a partir de Γ. Concluímos disso que B é dedutível a partir de Γ, e segue que Γ é inconsistente. O elemento central dessa demonstração é a utilização do teorema do ponto fixo para, a partir da suposição que C com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ, formalizar o paradoxo do mentiroso como a sentença B.

O teorema de Gödel-Tarski garante que, para um estoque consistente Γ, ou a diagonalização não é representável com a nomeação das fórmulas subjacente ou a dedutibilidade a partir de Γ não é definível com a nomeação subjacente.

Suponha, agora, que nosso estoque Γ fornece uma imagem simbólica da matemática no sentido que cada enunciado matemático bem formulado corresponde a uma sentença de modo que as demonstrações matemáticas, como sucessões de enunciados, correspondem a deduções a partir de Γ.

Assuma que a nomeação das fórmulas subjacente, ou seja, a associação dada de A com $\ulcorner A \urcorner$, é calculável. O enunciado que diz que a diagonalização de A é a sentença $A_x[\ulcorner A \urcorner]$ é um enunciado matemático verdadeiro por definição. A esse enunciado corresponde uma sentença do tipo

$$\forall w(D_z[\ulcorner A \urcorner] \leftrightarrow w = \ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner),$$

para alguma fórmula D apropriada e pronomes z e w. Como Γ fornece uma imagem da matemática como um todo e o nome $\ulcorner A_x[\ulcorner A \urcorner] \urcorner$ é calculável para qualquer A, a diagonalização deve ser calculável em Γ, ou seja a sentença acima deve ser dedutível a partir de Γ.

Assuma, por um momento, que nossa imagem símbólica da matemática é matematicamente decidível, ou seja, que há um procedimento computacional tal que para cada sentença A esse procedimento determina se A é dedutível. Como a nomeação das fórmulas subjacente é suposta calculável, tal procedimento deve poder ser levado a cabo também nessa imagem. Por outra formulação, deve haver uma fórmula apropriada C que com y define em Γ a dedutibilidade a partir de Γ.

Pelo teorema de Gödel-Tarski, nossa imagem simbólica da matemática seria inconsistente. Assumindo que há uma nomeação das fórmulas calculável, segue-se a conclusão que se uma imagem simbólica da matemática é consistente, então é indecidível. Segue-se também que se uma imagem simbólica da matemática é consistente, então há uma sentença A tal que A não é dedutível nessa imagem e $\neg A$ também não é dedutível.

O segundo teorema de Gödel reforça a incompletude apresentada como conclusão do parágrafo anterior e mostra que há uma obstrução para demonstrações de consistência. Se Γ fornece uma imagem simbólica da matemática que é consistente e, com uma nomeação apropriada das fórmulas, representa a diagonalização e é tal que existe uma fórmula P que é uma fórmula da dedutibilidade em Γ, então a sentença $\neg P_y[\ulcorner \bot \urcorner]$, em que $\bot$ é uma contradição qualquer, não é dedutível a partir de Γ. Observamos que uma sentença do tipo $\neg P_y[\ulcorner \bot \urcorner]$ é o melhor que Γ possui para expressar sua própria consistência, lembrando que Γ não define, nesse caso, a dedutibilidade a partir de si.

81. Teorema. [Segundo teorema de Gödel]

Sejam Γ um estoque de fórmulas nas condições do teorema do Gödel-Tarski e P uma fórmula de dedutibilidade em Γ. Seja $\bot$ uma sentença do tipo $B \wedge \neg B$. Desse modo, $\neg P_y[\ulcorner \bot \urcorner]$ é dedutível a partir de Γ se e somente se $\bot$ é dedutível a partir de Γ.

Demonstração. Como estamos nas condições do teorema de Löb, temos que $P_y[\ulcorner\bot\urcorner] \to \bot$ é dedutível a partir de Γ se e somente se $\bot$ é dedutível a partir de Γ.

Concluímos a demonstração com a observação que $\neg P_y[\ulcorner\bot\urcorner]$ e $P_y[\ulcorner\bot\urcorner] \to \bot$ são tautologicamente equivalentes. $\square$

82. Exercício. Assuma que Γ fornece uma imagem simbólica da matemática tal que há uma regra computacional para listar todas as sentenças dedutíveis a partir de Γ. Apresente um argumento heurístico para concluir que essa imagem é decidível no caso em que qualquer sentença A é tal que A é dedutível a partir de Γ ou $\neg A$ é dedutível a partir de Γ.

CAPíTULO 5

Satisfação de Fórmulas em Estruturas

1. Estruturas de Primeira Ordem Enumeráveis

Se S é um estoque de nomes próprios e símbolos de predicado, então dizemos que S é uma assinatura. Por interpretação dos símbolos que estão em uma assinatura S entendemos uma atribuição de referência para esses símbolos. Uma interpretação dos símbolos em S é uma atribuição de um indivíduo para cada nome próprio em S e de uma extensão apropriada para cada símbolo de predicado em S. Se F é uma fórmula cujos nomes próprios e símbolos de predicado estão em S então dizemos que F é uma fórmula em S, ou simplesmente uma S-fórmula. Se uma S-fórmula é, em particular, uma sentença, dizemos que é uma S-sentença.

Isso leva à noção de estrutura para a assinatura S: Dizemos que $\mathcal{M}$ é estrutura para S, ou simplesmente uma S-estrutura, se é uma tripla ordenada cujos termos são um conjunto não vazio $|\mathcal{M}|$, chamado domínio de indivíduos da estrutura, uma função que associa um elemento $t^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|$ a cada nome próprio t em S e uma função que associa um subconjunto $P^{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|^n$ a cada símbolo de predicado n-ário P em S. Sempre que usamos a expressão "S-estrutura" entendemos que S é uma assinatura.

Dizemos de uma S-estrutura $\mathcal{M}$ que ela é enumerável se e somente se o domínio de individuos $|\mathcal{M}|$ é um conjunto enumerável, finito ou infinito. Para simplificar, vamos considerar apenas estruturas enumeráveis, mas essa hipótese é dispensável. Os elementos do domínio de indivíduos são chamados indivíduos da estrutura, que, estamos supondo, são sempre em quantidade enumerável. Essa hipótese nunca é essencial, apenas é usada para simplificar sem corromper o tema exposto.

Nossa primeira tarefa é a de definir a relação de verdade entre uma sentença e uma estrutura. Devemos, para isso, delimitar precisamente o âmbito dos termos assim relacionados. Em princípio, é requerido que a relação de verdade relacione pelo menos S-estruturas e S-sentenças. Contudo, dada uma S-estrutura $\mathcal{M}$, a restrição do escopo da verdade em $\mathcal{M}$ às S-sentenças é inconveniente. Por isso, consideramos uma assinatura mais ampla que S para definir a própria relação de verdade entre S-estruturas e S-sentenças. Vejamos como, exatamente.

Considere $\mathcal{M}$ uma S-estrutura. Agora ampliamos S com exatamente um nome próprio novo t para cada indivíduo a do domínio e estendemos a função que dá a denotação dos nomes próprios estipulando que a é denotado por t. Representamos a assinatura ampliada por $S(\mathcal{M})$ e a denotação do nome próprio novo t por $t^{\mathcal{M}}$. A rigor, estamos considerando uma $S(\mathcal{M})$-estrutura expandida diferente de $\mathcal{M}$, mas não vamos utilizar uma notação específica para tal expansão naturalmente identificada com a própria $\mathcal{M}$. Se A é uma sentença em $S(\mathcal{M})$, dizemos que A é verdadeira em $\mathcal{M}$, o que é representado por $\mathcal{M} \models A$, se e somente se todas as condições a seguir são obtidas:

(1) Se A é atômica, do tipo $P(t, u, v, ...)$, em que P é um símbolo de predicado em S e t, u, v são nomes próprios em $S(\mathcal{M})$, então $(t^{\mathcal{M}}, u^{\mathcal{M}}, v^{\mathcal{M}}, ...) \in P^{\mathcal{M}}$.

(2) Se A é uma negação, do tipo $\neg B$, então não é o caso que $\mathcal{M} \models B$.

(3) Se A é uma disjunção, do tipo $B \vee C$, então $\mathcal{M} \models B$ ou $\mathcal{M} \models C$.

(4) Se A é existencial, do tipo $\exists x B$, então existe um nome próprio t em $S(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{M} \models B_x[t]$.

Pelo lema da leitura única, as cláusulas acima definem, sem ambiguidade, se uma dada sentença em $S(\mathcal{M})$ é verdadeira em $\mathcal{M}$. Podemos definir, a partir da relação de verdade definida acima, a relação derivada de satisfação de uma fórmula em S por indivíduos em $\mathcal{M}$.

Sejam x_1, x_2, ... uma lista finita de n pronomes distintos e F uma fórmula em S tal que se um pronome ocorre livre em F, então esse pronome está nessa lista. Seja $(a_1, a_2, ...)$ uma sequência de n indivíduos de $\mathcal{M}$, representada por $\overline{a}$. Dizemos que $\overline{a}$ satisfaz F em $\mathcal{M}$, o que representamos por $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$, se e somente se $\mathcal{M} \models F_{x_1,x_2,...}[t_1, t_2, ...]$, em que t_1, t_2, ... são nomes próprios de a_1, a_2, ... em $S(\mathcal{M})$, respectivamente. A definição de $S(\mathcal{M})$ garante que há pelo menos um nome próprio para cada indivíduo. Do lema preliminar a seguir temos que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ não depende da escolha de nomes próprios para os indivíduos da lista $\overline{a}$.

Uma sequência finita de n indivíduos é também chamada de n-upla de indivíduos. Se $\overline{a}$ é uma n-upla de indivíduos e a é um indivíduo, a $n+1$-upla cujo último termo é a e os n primeiros termos são os termos de $\overline{a}$ é representada por $\overline{a}\,\hat{}\,a$. A notação $P^{\mathcal{M}}(a_1, a_2, ...)$ para $\overline{a} \in P^{\mathcal{M}}$, em que P é um símbolo de predicado n-ário, também é empregada.

83. Lema. [Lema da extensionalidade dos nomes]

Sejam $\mathcal{M}$ uma S-estrutura, x um pronome e A uma fórmula em $S(\mathcal{M})$ tal que se algum pronome ocorre livre em A, então é x. Sejam t e u nomes próprios tais que $t^{\mathcal{M}} = u^{\mathcal{M}}$. Temos que

$$\mathcal{M} \models A_x[t] \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models A_x[u].$$

Demonstração. Por indução na complexidade de A.

Passo base:

Se A é atômica, então $A_x[t]$ é do tipo $P(t_1, t_2, ...)$, e $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se $(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}}, ...) \in P^{\mathcal{M}}$. Por outro lado, $A_x[u]$ é do tipo $P(u_1, u_2, ...)$, e $\mathcal{M} \models A_x[u]$ se e somente se $(u_1^{\mathcal{M}}, u_2^{\mathcal{M}}, ...) \in P^{\mathcal{M}}$.

Mas as listas t_1, t_2, ... e u_1, u_2, ... são tais que os termos correspondentes são o mesmo nome próprio ou são t e u, respectivamente. Em qualquer caso, o mesmo indivíduo é associado, na estrutura $\mathcal{M}$, aos termos correspondentes, o que significa que $(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}}, ...)$ é igual a $(u_1^{\mathcal{M}}, u_2^{\mathcal{M}}, ...)$. Disso concluímos que

$$\mathcal{M} \models A_x[t] \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models A_x[u].$$

Passo indutivo:

Se A é uma negação, do tipo $\neg B$, então $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se não é o caso que $\mathcal{M} \models B_x[t]$. Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[u]$. Mas $\mathcal{M} \models A_x[u]$ se e somente se não é o caso que $\mathcal{M} \models B_x[u]$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models A_x[u]$.

Se A é uma disjunção, do tipo $B \vee C$, então $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[t]$ ou $\mathcal{M} \models C_x[t]$. Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[u]$ e $\mathcal{M} \models C_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models C_x[u]$. Mas $\mathcal{M} \models A_x[u]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[u]$ ou $\mathcal{M} \models C_x[u]$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models A_x[u]$.

Se A é existencial, do tipo $\exists y B$, então temos que distinguir dois casos. Se x é y, então $A_x[t]$ é $A_x[u]$ que é A, simplesmente, e a equivalência vale. Caso contrário, $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se para algum nome próprio novo v, $\mathcal{M} \models B_{x,y}[t, v]$. Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B_{x,y}[t, v]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_{x,y}[u, v]$. Mas $\mathcal{M} \models A_x[u]$ se e somente se para algum nome próprio novo v, é o caso que $\mathcal{M} \models B_{x,y}[u, v]$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models A_x[u]$. □

84. Observação. Demonstrações por indução como a do lema acima são rotineiras no estudo de estruturas de primeira ordem.

Se S é um estoque de símbolos e S' está contido em S, no sentido que todo símbolo de S' está em S, então para cada S-estrutura $\mathcal{M}$ há uma S'-estrutura $\mathcal{M}'$ obtida a partir de $\mathcal{M}$ pela restrição da interpretação dos símbolos ao estoque S'. As estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ possuem o mesmo domínio de indivíduos e cada símbolo que ocorre em S' é interpretado em $\mathcal{M}'$ do mesmo modo que em $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{M}'$ é o reduto de $\mathcal{M}$ para S'.

Se ampliamos S' com um nome próprio novo para cada indivíduo de $\mathcal{M}'$, obtemos $S'(\mathcal{M}')$. Como $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ possuem o mesmo domínio, podemos estipular que os nomes próprios novos em $S'(\mathcal{M}')$ são exatamente os nomes próprios novos em $S(\mathcal{M})$. Nessas condições temos o seguinte lema, que é útil.

85. Lema. [Lema do reduto]
Sejam $\mathcal{M}$ uma S-estrutura e $\mathcal{M}'$ uma S'-estrutura tais que $\mathcal{M}'$ é reduto de $\mathcal{M}$. Seja A uma $S'(\mathcal{M}')$-sentença. Temos que

$$\mathcal{M} \models A \textit{ se e somente se } \mathcal{M}' \models A.$$

Demonstração. *Passo base:*

Se A é atômica, então é do tipo $P(t_1, t_2, ...)$, e

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } (t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}}, ...) \in P^{\mathcal{M}}.$$

Por outro lado, $\mathcal{M}' \models A$ se e somente se $(t_1^{\mathcal{M}'}, t_2^{\mathcal{M}'}, ...) \in P^{\mathcal{M}'}$.

Como a estrutura $\mathcal{M}'$ é o reduto de $\mathcal{M}$ para S', $(t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}}, ...)$ é igual a $(t_1^{\mathcal{M}'}, t_2^{\mathcal{M}'}, ...)$ e $P^{\mathcal{M}}$ é igual a $P^{\mathcal{M}'}$. Disso concluímos que

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } \mathcal{M}' \models A.$$

Passo indutivo:

Se A é uma negação, do tipo $\neg B$, então $\mathcal{M} \models A$ se e somente se não é o caso que $\mathcal{M} \models B$. Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B$ se e somente se $\mathcal{M}' \models B$. Mas $\mathcal{M}' \models A$ se e somente se não é o caso que $\mathcal{M}' \models B$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $\mathcal{M}' \models A$.

Se A é uma disjunção, do tipo $B \vee C$, então $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $\mathcal{M} \models B$ ou $\mathcal{M} \models C$. Por hipótese de indução,

$$\mathcal{M} \models B \text{ se e somente se } \mathcal{M}' \models B \text{ e } \mathcal{M} \models C \text{ se e somente se } \mathcal{M}' \models C.$$

Mas $\mathcal{M}' \models A$ se e somente se $\mathcal{M}' \models B$ ou $\mathcal{M}' \models C$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $\mathcal{M}' \models A$.

Se A é existencial, do tipo $\exists x B$, então

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se para algum nome próprio novo } t,\ \mathcal{M} \models B_x[t].$$

Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M}' \models B_x[t]$. Mas $\mathcal{M}' \models A$ se e somente se para algum nome próprio novo t, é o caso que $\mathcal{M} \models B_x[t]$. Juntando tudo, $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $\mathcal{M}' \models A$. □

86. Observação. Observamos que a suposição que nossas estruturas são enumeráveis foi usada, pois, caso contrário, não haveria nomes próprios novos em quantidade suficiente para formar $S(\mathcal{M})$. Mas isso ocorre apenas porque estipulamos de início que o estoque total de símbolos disponíveis para formar assinaturas é enumerável. A estipulação inicial é importante para o caráter finitário e algorítmico da análise desenvolvida nos primeiros quatro capítulos, em que a noção básica de dedução está associada a um procedimento mecânico de reconhecimento: Há um algoritmo que determina se uma dada entrada é uma dedução. Cada dedução que mostramos existir foi apresentada por meio da descrição de um algorítmo que a gera a partir dos dados relevantes. Esse aspecto não é predominante no estudo das estruturas, por isso é usual adotar uma perspectiva abstrata sobre a linguagem nesse caso. Contudo, ainda vamos usar essencialmente a enumerabilidade de assinaturas e estruturas, e as convenções adotadas permitem um acesso rápido e simplificado ao que é central neste estudo da lógica de primeira ordem.

A noção de q-equivalência introduzida a seguir é central para a análise dos predicados definíveis. Primeiro, vamos definir o posto quantificacional de uma fórmula. Seja A uma fórmula. O posto quantificacional de A, representado por $rk(A)$, é definido, por indução, como o número máximo de quantificações encaixadas em A: Se A

é atômica então $rk(A)$ é zero, se A é $\neg B$, então $rk(A)$ é $rk(B)$, se A é $B \vee C$, então $rk(A)$ é o máximo entre $rk(B)$ e $rk(C)$), e se A é $\exists x B$, então $rk(A)$ é $rk(B) + 1$.

Sejam S uma assinatura, n e q números naturais. Seja x_1, x_2, ... uma lista finita de n pronomes distintos. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ estruturas para S, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ sequências de n indivíduos em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente. Dizemos que o par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ é q-equivalente ao par $(\mathcal{N}, \overline{b})$ se e somente se para toda S-fórmula F, se $rk(F) \leq q$ e nenhum pronome fora da lista x_1, x_2, ... ocorre livre em F, então

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

87. Observação. A escolha dos n pronomes x_1, x_2, ... não é relevante para a relação de q-equivalência, apenas o parâmetro n importa. Ou seja, o par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ é q-equivalente ao par $(\mathcal{N}, \overline{b})$ se e somente se para toda S-fórmula F tal que $rk(F) \leq q$ e nenhum pronome fora da lista y_1, y_2, ... de n pronomes distintos ocorre livre, temos que

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

Para uma assinatura S e um número natural n, representamos a relação de q-equivalência correspondente por $\approx_q$. A classe de equivalência do par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ pela relação $\approx_q$ é representada por $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$.

88. Observação. Para reduzir a classe de equivalência do par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ pela relação $\approx_q$ a um conjunto, podemos estipular que o domínio de qualquer estrutura na classe de equivalência é subconjunto de $|\mathcal{M}|$. Desse modo, temos apenas uma quantidade conjunto de domínios possíveis. Como para cada domínio temos apenas uma quantidade conjunto de S-estruturas com aquele domínio, segue que a classe $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$ assim restrita é um conjunto.

89. Exercício. Seguindo as condições estabelecidas na presente seção, demonstre, generalizando o lema da extensionalidade dos nomes, que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ não depende da escolha de nomes próprios para os indivíduos da n-upla $\overline{a}$. Demonstre também que a relação de q-equivalência não depende da escolha dos pronomes distintos x_1, x_2, ..., só a quantidade importa.

2. Valores de Primeira Ordem e Tipos

Começamos estabelecendo nossa notação: O estoque de pronomes que ocorrem livres em uma fórmula A é denotado por $fv(A)$. Sejam n e q números naturais. Sejam S uma assinatura, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ sequências de n indivíduos em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente. Lembramos que o par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ é q-equivalente ao par $(\mathcal{N}, \overline{b})$ se para cada fórmula F na assinatura S, tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, e com no máximo q quantificações encaixadas,

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

Para uma assinatura S e um número natural n, representamos a relação de q-equivalência correspondente por $\approx_q$. A classe de equivalência do par $(\mathcal{M}, \overline{a})$, pela relação $\approx_q$, é representada por $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$. Uma tal classe de equivalência representa a mínima informação acerca do par $(\mathcal{M}, \overline{a})$ suficiente para determinar se $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ qualquer que seja a fórmula F como acima. A informação é mínima no sentido que se uma classe de pares (S-estrutura e n-upla de indivíduos) contém propriamente $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$, então existe um par $(\mathcal{N}, \overline{b})$ nessa classe e uma fórmula F que distingue $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que F é uma S-fórmula com no máximo q quantificações encaixadas e tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Tomando a negação de F se preciso, podemos assumir que F distingue os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$ do seguinte modo:

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{N} \not\models F[\overline{b}].$$

Isso é consequência direta da definição de $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$. Por esse motivo dizemos que $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$ é o valor de primeira ordem de posto q do par $(\mathcal{M}, \overline{a})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de S-estruturas. Todas as noções definidas podem ser relativizadas à classe $\mathbf{K}$. Para obter uma noção relativizada basta considerar apenas S-estruturas pertencentes à classe $\mathbf{K}$ nas condições que definem a noção original. Por exemplo, para n e q números naturais, podemos restringir a relação de q-equivalência aos pares ordenados de S-estruturas e n-uplas de indivíduos em que a S-estrutura pertence a $\mathbf{K}$. Se $\mathcal{M}$ é uma S-estrutura em $\mathbf{K}$ e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{M}$, então a classe de equivalência restrita de $(\mathcal{M}, \overline{a})$ pela relação de q-equivalência relativizada será representada por $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q^{\mathbf{K}}$. Trata-se da classe de todos os pares $(\mathcal{N}, \overline{b})$ tais que $\mathcal{N} \in \mathbf{K}$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}) \in [(\mathcal{M}, \overline{a})]_q$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de S-estruturas, $\mathcal{M}$ uma estrutura em $\mathbf{K}$ e $\overline{a}$ uma n-upla em $\mathcal{M}$. O n-tipo de $(\mathcal{M}, \overline{a})$, relativo a $\mathbf{K}$, é o conjunto $\left\{[(\mathcal{M}, \overline{a})]_p^{\mathbf{K}} : p \in \omega\right\}$. Como dissemos que o valor de primeira ordem de posto q de $(\mathcal{M}, \overline{a})$ representa a informação necessária (mínima) e suficiente sobre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ para determinar se $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ para uma fórmula F qualquer tal que $rk(F) \leq q$ e $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, o n-tipo de $(\mathcal{M}, \overline{a})$ representa a soma dessas informações para todos os postos quantificacionais. Ou seja, o n-tipo de $(\mathcal{M}, \overline{a})$ representa a informação necessária e suficiente sobre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ para determinar se $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ qualquer que seja F com $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. O corolário demonstrado abaixo torna precisa essa afirmação.

O conjunto de todos os n-tipos relativos a $\mathbf{K}$ é representado por $E_n(\mathbf{K})$, e o n-tipo de $(\mathcal{M}, \overline{a})$, relativo a $\mathbf{K}$, é representado por $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{M}, \overline{a})$.

90. Lema. [Lema da igualdade de tipos]

Seja $\boldsymbol{K}$ uma classe de S-estruturas. Para todas as estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{M}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{N}$, os n-tipos $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{N}, \overline{b})$ são iguais se e somente se para cada q número natural, $[(\mathcal{M}, \overline{a})]_q^{\boldsymbol{K}} = [(\mathcal{N}, \overline{b})]_q^{\boldsymbol{K}}$.

Demonstração. Se a condição vale, então a igualdade dos n-tipos $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{N}, \overline{b})$ é imediata.

Conversamente, assuma que $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{M}, \overline{a}) = tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{N}, \overline{b})$. Para cada valor de primeira ordem $[(\mathcal{N}, \overline{b})]_q^{\mathbf{K}}$ relativo a $\mathbf{K}$, como

$$[(\mathcal{N}, \overline{b})]_q^{\mathbf{K}} \in tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{M}, \overline{a}),$$

existe um número natural p, tal que $[(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_p = [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q$.

Se $\mathcal{M}'$ está em $\mathbf{K}$ e $(\mathcal{M}',\overline{c}) \approx_q (\mathcal{M},\overline{a})$, então, como $(\mathcal{M},\overline{a}) \in [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q$, segue que

$$(\mathcal{M}',\overline{c}) \in [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q = [(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_p.$$

Isso significa que $[(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_q \subseteq [(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_p$.

Por outro lado, se $(\mathcal{M}',\overline{c}) \in [(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_p$, então $(\mathcal{M}',\overline{c}) \in [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q$. Como, $(\mathcal{M},\overline{a}) \in [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q$, segue que $(\mathcal{M}',\overline{c}) \approx_q (\mathcal{M},\overline{a})$. Disso segue a outra inclusão, que $[(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_p \subseteq [(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_q$, e a igualdade

$$[(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_q = [(\mathcal{N},\overline{b})]^{\mathbf{K}}_q,$$

vale. □

Fechamos a seção com o corolário abaixo segundo o qual $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$ possuem o mesmo n-tipo se e somente se são equivalentes do ponto de vista da linguagem da lógica de primeira ordem. A comparação entre pares $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$, particularmente a relação de q-equivalência, é retomada no capítulo seguinte.

91. Corolário. *Seja $\boldsymbol{K}$ uma classe de S-estruturas. Para todas as estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ em $\boldsymbol{K}$, e todas as n-uplas $\overline{a}$ em $\mathcal{M}$ e $\overline{b}$ em $\mathcal{N}$, os n-tipos $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{M},\overline{a})$ e $tp^{\boldsymbol{K}}(\mathcal{N},\overline{b})$ são iguais se e somente se $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$ satisfazem as mesmas fórmulas na assinatura S em que nenhum pronome fora da lista x_1, x_2, ... de n pronomes ocorre livre.*

Demonstração. É uma consequência imediata do lema da igualdade de tipos: Os n-tipos $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{M},\overline{a})$ e $tp^{\mathbf{K}}(\mathcal{N},\overline{b})$ são iguais se e somente se $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$ satisfazem exatamente as mesmas fórmulas de posto q, para todo natural q. □

92. Exercício. Sejam n e q números naturais, S uma assinatura finita e $\mathbf{K}$ uma classe de S-estruturas. Mostre que cada valor de primeira ordem $[(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_q$ é caracterizado por uma única descrição de estado ψ em $\Gamma^S(n,q)$ (veja a primeira seção do capítulo seguinte) no sentido que para qualquer estrutura $\mathcal{N} \in \mathbf{K}$, e qualquer n-upla $\overline{b}$, o par $(\mathcal{N},\overline{b}) \in [(\mathcal{M},\overline{a})]^{\mathbf{K}}_q$ se e somente se $\mathcal{N} \models \psi[\overline{b}]$.

3. Extensões de Henkin Máximas e a Estrutura Canônica

Gostaríamos de saber se dado um estoque de sentenças há um estrutura que satisfaz todas as sentenças dele. Não há tal estrutura no caso em que alguma sentença e sua negação estão ambas no estoque, pois nenhuma estrutura satisfaz tanto uma quanto a outra, mas essa é basicamente a única condição que não pode ser obtida. Mais precisamente, vamos mostrar que se o estoque é consistente, então há uma estrutura que satisfaz suas sentenças. O método de demonstração avança em duas etapas, primeiro o estoque consistente dado é estendido a um estoque apropriado de sentenças, depois uma estrutura canônica é extraída a partir do estoque estendido.

Seja Γ um estoque de sentenças. Dizemos que Γ é consistente se e somente se não é o caso que todas as fórmulas podem ser deduzidas a partir de Γ. Tal propriedade equivale à impossibilidade de se deduzir uma contradição qualquer a partir de Γ. Pelo teorema da conservatividade dos axiomas especiais, o estoque de sentenças obtido por uma adição qualquer de axiomas especiais a Γ é ainda consistente. Em particular, o estoque Δ obtido pela reunião de Γ com todos os axiomas especiais para nomes especiais de nível 0, todos os axiomas especiais para nomes especiais de nível 1, todos os axiomas especiais para nomes especiais de nível 2, etc, é consistente.

Considere a lista enumerada A_1, A_2, A_3, ... constituída por todas as sentenças na assinatura estendida com todos os nomes especiais de todos os níveis. Seja S tal assinatura. Considere a sequência $\Delta_0 = \Delta$, Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... caracterizada pela recursão determinada por (i) se $\Delta_n \cup A_{n+1}$ é consistente, então $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup A_{n+1}$ e (ii) se $\Delta_n \cup A_{n+1}$ é inconsistente, então $\Delta_{n+1} = \Delta_n$. Seja Γ' a reunião de todos os termos dessa sequência, ou seja, a reunião de Δ_0 com Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc. O estoque Γ' assim determinado é uma extensão consistente de Δ, portanto de Γ, e é negação-completo no sentido que para cada sentença A em S (na assinatura estendida) ou A está em Γ' ou $\neg A$ está em Γ'. Dizemos que Γ' é uma extensão de Henkin máxima de Γ.

Há uma S-estrutura $\mathcal{M}$ canonicamente associada a Γ'. Tomamos como domínio de indivíduos de $\mathcal{M}$ o conjunto dos nomes próprios da linguagem de Γ'. Segue que o domínio de $\mathcal{M}$ é infinito e enumerável. A interpretação dos nomes próprios é direta: Se t é um nome próprio em S, então $t^{\mathcal{M}} = t$. Se P é um símbolo de predicado n-ário em S e $(t, u, v, ...)$ é uma sequência de n indivíduos, então estipulamos que $(t, u, v, ...) \in P^{\mathcal{M}}$ se e somente se a fórmula atômica $P(t, u, v, ...)$ está em Γ'. É importante não perder de vista que, pela definição do domínio de $\mathcal{M}$, os nomes próprios t, u, v, ... ora desempenham o papel de indivíduos, ora desempenham o papel de símbolos nessa interpretação. Dizemos que $\mathcal{M}$ é a estrutura canônica associada a Γ'.

A construção de $\mathcal{M}$ acima requer apenas a ocorrência de um nome próprio em S. Nenhuma propriedade relevante de Γ' é requerida, é apenas necessário que pelo menos um nome próprio ocorra em Γ' para evitar que o domínio de $\mathcal{M}$ seja vazio. Contudo, para demonstrar o lema abaixo usamos que o estoque Γ' é consistente, negação-completo e contém a totalidade dos axiomas especiais.

Temos aqui a formulação de um procedimento básico segundo o qual uma estrutura que satisfaz todas as sentenças de um dado estoque é extraída canonicamente a partir desse mesmo estoque de sentenças desde que ele seja consistente e suficientemente informativo. Como veremos na demonstração a seguir, o estoque Γ' é suficientemente informativo nesta apresentação no sentido que (i) se uma sentença na assinatura estendida não está em Γ', então sua negação está, (ii) se uma disjunção está em Γ', então pelo menos uma de suas componentes também está e (iii) se uma sentença existencial está em Γ', então alguma instância fechada do seu escopo também está.

93. LEMA. [Lema da estrutura canônica]

Sejam Γ *um estoque consistente de fórmulas,* Γ' *uma extensão de Henkin máxima de* Γ*,* S *a assinatura estendida com os nomes próprios especiais de todos os níveis e* $\mathcal{M}$ *a estrutura canônica associada a* Γ'*. Para cada sentença* A *em* S*, temos que* $\mathcal{M} \models A$ *se e somente se* A *está em* Γ'*.*

DEMONSTRAÇÃO. O lema é demonstrado por indução na complexidade de A.

Passo base:

Se A é uma sentença atômica em S, então A é da forma $P(t, u, v, ...)$. Nesse caso,

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } (t^{\mathcal{M}}, u^{\mathcal{M}}, v^{\mathcal{M}}, ...) \in P^{\mathcal{M}}.$$

Como $t^{\mathcal{M}} = t$, $u^{\mathcal{M}} = u$, $v^{\mathcal{M}} = v$, etc, conforme estipulamos a denotação dos nomes próprios na estrutura canônica, temos

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } (t, u, v, ...) \in P^{\mathcal{M}}.$$

Pela definição da estrutura canônica, $(t, u, v, ...) \in P^{\mathcal{M}}$ se e somente se $P(t, u, v, ...)$ está em Γ', e o passo base está demonstrado.

Passo indutivo:

Se A é $\neg B$, então

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se não é o caso que } \mathcal{M} \models B.$$

Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B$ se e somente se $B \in \Gamma'$. Portanto,

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } B \notin \Gamma'.$$

Como Γ' é negação-completo, $B \notin \Gamma'$ se e somente se $\neg B \in \Gamma'$, de onde concluímos que $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $A \in \Gamma'$.

Se A é $B \vee C$, então

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models B \text{ ou } \mathcal{M} \models C.$$

Por hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B$ se e somente se $B \in \Gamma'$ e, similarmente, $\mathcal{M} \models C$ se e somente se $C \in \Gamma'$. Portanto,

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } B \in \Gamma' \text{ ou } C \in \Gamma'.$$

Como Γ' é negação-completo, $B \vee C \notin \Gamma'$ se e somente se $\neg(B \vee C) \in \Gamma'$. Contudo, pela consistência e negação-completude de Γ', temos que

$$\neg(B \vee C) \in \Gamma' \text{ se e somente se } B \notin \Gamma' \text{ e } C \notin \Gamma'.$$

Além disso, $B \in \Gamma'$ ou $C \in \Gamma'$ se e somente se não é o caso que $B \notin \Gamma'$ e $C \notin \Gamma'$. Concluímos que $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $B \vee C \in \Gamma'$, ou seja, que $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $A \in \Gamma'$.

Se A é $\exists x B$, então

$$\mathcal{M} \models A \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models B_x[t], \text{ para algum nome próprio novo } t \text{ em } S(\mathcal{M}).$$

Qualquer nome próprio em $S(\mathcal{M})$ denota um indivíduo do domínio. No caso da estrutura canônica $\mathcal{M}$, o domínio é o conjunto dos nomes próprios em S. Se t é um nome próprio novo em $S(\mathcal{M})$, então $t^{\mathcal{M}} = u$, para algum nome próprio u em S. Pela definição de $\mathcal{M}$, se u é um nome próprio em S, então $u^{\mathcal{M}} = u$ e, pelo lema da extensionalidade dos nomes, se $t^{\mathcal{M}} = u^{\mathcal{M}}$, então $\mathcal{M} \models B_x[t]$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[u]$. Concluímos que $\mathcal{M} \models B_x[t]$, para algum nome próprio novo t em $S(\mathcal{M})$ se e somente se $\mathcal{M} \models B_x[u]$, para algum nome próprio u em S.

Por hipótese de indução, para qualquer nome próprio u em S,

$$\mathcal{M} \models B_x[u] \text{ se e somente se } B_x[u] \in \Gamma'.$$

Vamos mostrar que $B_x[u] \in \Gamma'$ para algum nome próprio u em S se e somente se $\exists x B \in \Gamma'$.

Por um lado, suponhamos que $B_x[u] \in \Gamma'$ para algum nome próprio u em S. Pela consistência de Γ', não é o caso que $\neg\exists x B \in \Gamma'$. Mas, pela negação-completude de Γ', se $\neg\exists x B \notin \Gamma'$, então $\exists x B \in \Gamma'$. Por outro lado, suponhamos que $\exists x B \in \Gamma'$. Se u é o nome especial associado a $\exists x B$, então o axioma especial $\exists x B \to B_x[u]$ está na extensão de Henkin máxima Γ'. Disso segue, pela consistência de Γ', que $\neg B_x[u] \notin \Gamma'$. Da negação-completude de Γ' resulta que $B_x[u] \in \Gamma'$ para o nome próprio especial u em S, o que conclui a demonstração do caso existencial. $\square$

Como consequência imediata do lema acima, a estrutura canônica $\mathcal{M}$ associada a Γ' satisfaz todas as sentenças que estão em Γ'. Em particular, temos uma estrutura $\mathcal{M}$ que satisfaz todas as sentenças que estão em Γ. Se queremos uma estrutura na assinatura associada a Γ, e não na assinatura estendida com nomes especiais S, podemos, pelo lema do reduto, considerar o reduto de $\mathcal{M}$ para tal assinatura. A conclusão relevante é que para qualquer estoque consistente de sentenças, existe uma estrutura que satisfaz todas as suas sentenças. Isso será utilizado na próxima seção para demonstrar o teorema da completude e apresentar outra caracterização das sentenças dedutíveis.

94. Exercício. Considere a notação estabelecida nos primeiros parágrafos desta seção. Demonstre que os estoques Δ e Γ' são ambos consistentes. Demonstre ainda que o estoque Γ' é negação-completo.

4. O Teorema da Completude

Se Γ é um estoque de S-sentenças e $\mathcal{M}$ é uma S-estrutura, dizemos que $\mathcal{M}$ é modelo de Γ se e somente se $\mathcal{M} \models A$, para toda sentença A em Γ. Consideramos que uma assinatura S está implicitamente estipulada no que segue, e todas as fórmulas e estruturas mencionadas nesta seção são S-fórmulas e S-estruturas. Pela seção anterior, se Γ é consistente, então existe um modelo de Γ, ou, de modo abreviado, Γ tem modelo. De fato, sabemos que nesse caso Γ admite uma extensão de Henkin máxima, e a estrutura canônica associada a qualquer extensão de Henkin máxima de Γ é um modelo dessa mesma extensão, portanto também de Γ.

Considere Δ um estoque de sentenças e A uma sentença. Se todo modelo $\mathcal{M}$ de Δ é tal que $\mathcal{M} \models A$, então nenhuma estrutura é ao mesmo tempo modelo de Δ e de $\neg A$. Seja Γ o estoque de sentenças obtido a partir de Δ pela adição de $\neg A$. Reformulando o que acabamos de afirmar, Γ não tem modelo. Pelo que foi mostrado acima, Γ é inconsistente. Contudo, se Γ é inconsistente, então A, e qualquer outra sentença, é dedutível a partir de Γ. Pelo teorema da dedução, $\neg A \to A$ é dedutível a partir de Δ. Mas A é consequência tautológica de $\neg A \to A$, pois $(\neg A \to A) \to A$ é uma tautologia. Portanto A é dedutível a partir de Δ. Isso demonstra o importante resultado a seguir, devido a Gödel.

95. Teorema. [Teorema da completude]
Sejam Δ um estoque de sentenças e A uma sentença. Se todo modelo $\mathcal{M}$ de Δ é tal que $\mathcal{M} \models A$, então A é dedutível a partir de Δ.

Vamos demonstrar também a implicação conversa. Juntas, implicação direta e conversa fornecem uma caracterização das sentenças dedutíveis a partir de Δ: São exatamente as sentenças A para as quais $\mathcal{M} \models A$ qualquer que seja $\mathcal{M}$ modelo de Δ.

96. Teorema. [Teorema da correção]
Sejam Δ um estoque de sentenças e A uma fórmula. Se A é dedutível a partir de Δ e $\mathcal{M}$ é modelo de Δ, então para cada instância fechada A' de A em $S(\mathcal{M})$, temos que $\mathcal{M} \models A'$.

Demonstração. Suponhamos que há uma dedução de A a partir de Δ e que $\mathcal{M}$ é modelo de Δ. Vamos demonstrar, por indução no comprimento da dedução, que $\mathcal{M} \models A'$, qualquer que seja a instância fechada A' em $S(\mathcal{M})$.

Passo base:

Se A é um axioma da substituição, então A' é da forma $B_x[t] \to \exists x B$. Como A' é uma sentença, ou t é um nome próprio em $S(\mathcal{M})$ ou x não ocorre livre em B. No primeiro caso, se $\mathcal{M} \models B_x[t]$, então existe um nome próprio, t ele mesmo, em $S(\mathcal{M})$ tal que $\mathcal{M} \models B_x[t]$. No segundo caso t não precisaria ser um nome próprio, mas qualquer instância de B é, agora, simplesmente a própria sentença B, e

$$\text{se } \mathcal{M} \models B_x[t], \text{ então } \mathcal{M} \models B_x[u],$$

em que u é um nome próprio qualquer em $S(\mathcal{M})$, pois $B_x[u]$ é B e $B_x[t]$ também é B. Em qualquer caso,

$$\text{se } \mathcal{M} \models B_x[t], \text{ então existe um nome próprio } v \text{ em } S(\mathcal{M}) \text{ tal que } \mathcal{M} \models B_x[v],$$

e $\mathcal{M} \models \exists x B$. Ou seja, $\mathcal{M} \models B_x[t] \to \exists x B$.

Se A está no estoque Δ, então A é uma sentença e qualquer instância de A é simplesmente A. Nesse caso, $\mathcal{M} \models A$ pela hipótese que $\mathcal{M}$ é modelo de Δ. Isso encerra a demonstração do passo base.

Passo indutivo:

Se A é consequência tautológica de B_1, B_2, ..., fórmulas anteriores na dedução, então, pela observação feita na primeira seção do capítulo 2, A' é consequência tautológica de instâncias fechadas apropriadas B_1', B_2', ..., obtidas pela substituição uniforme de pronomes. Sabemos que

$$\mathcal{M} \models B_1', \mathcal{M} \models B_2', ...,$$

por hipótese de indução. Se estipulamos que uma sentença C em $S(\mathcal{M})$ é verdadeira se e somente se $\mathcal{M} \models C$, então essa estipulação satisfaz as regras usuais para a determinação do valor de verdade de negações e disjunções. Além disso, de acordo com tal estipulação, B_1', B_2', ... são todas verdadeiras. Disso segue, pela definição de consequência tautológica, que A' é verdadeira, ou seja, $\mathcal{M} \models A'$.

Suponhamos que A é $\exists x B \to C$, e é obtida pela aplicação da introdução do existencial em $B \to C$, em que x não ocorre livre em C. Nesse caso, A' é da forma $\exists x B' \to C'$ e, por hipótese de indução, sabemos que

$$\mathcal{M} \models B_x'[t] \to C', \text{ qualquer que seja } t \text{ nome próprio em } S(\mathcal{M}).$$

Suponhamos que $\mathcal{M} \models \exists x B'$. Então

$$\mathcal{M} \models B_x'[u] \text{ para algum nome próprio } u \text{ em } S(\mathcal{M}).$$

Como, pela hipótese de indução, $\mathcal{M} \models B_x'[u] \to C'$, de $\mathcal{M} \models B_x'[u]$ segue-se que $\mathcal{M} \models C'$. □

Vamos extrair dos resultados acima a mais importante condição necessária e suficiente para a existência de modelos, enunciada a seguir.

97. TEOREMA. [Teorema da compacidade]
Se Γ é um estoque de sentenças, então Γ tem modelo se e somente se toda parte finita de Γ tem modelo

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que Γ tem modelo, e seja $\mathcal{M}$ modelo de Γ. Como $\mathcal{M}$ satisfaz todas as sentenças de Γ, segue que $\mathcal{M}$ é também modelo de qualquer parte de Γ.

A implicação conversa é demonstrada pela contrapositiva. Já vimos que se Γ não tem modelo, então Γ é inconsistente. Mas Γ é inconsistente se e somente se uma sentença do tipo $\neg A \wedge A$ é dedutível a partir de Γ. Se $\neg A \wedge A$ é dedutível a partir de Γ, então é dedutível a partir de alguma parte finita apropriada de Γ que, portanto, também é inconsistente. Concluímos que se Γ não tem modelo, então alguma parte finita sua é inconsistente e, como consequência, não tem modelo também. □

98. EXERCÍCIO. Seja Γ um estoque de sentenças. Use o teorema da correção para mostrar que se há um modelo $\mathcal{M}$ de Γ, então Γ é consistente.

CAPíTULO 6

Teoria Geral das Definições

1. O Teorema de Fraïssé

Nosso primeiro objetivo é entender as relações de q-equivalência no caso em que S é uma assinatura finita. Queremos entender que conexão direta há entre pares q-equivalentes, sem passar pela satisfação de fórmulas complexas. Desse modo, ganharíamos entendimento sobre a condição imposta a duas estruturas pela q-equivalência. Ou seja, estamos interessados em analisar de que modo e em que medida duas estruturas q-equivalentes são similares. Isso pode ser feito por meio das relações de q-isomorfia parcial.

Lembramos que $fv(A)$ denota o estoque de pronomes livres de A: Se A é atômica então A é da forma $P(t_1, t_2, ...)$ e $fv(A)$ é o estoque dos pronomes dentre os nomes t_1, t_2, ...; se A é $\neg B$ então $fv(A)$ é o estoque $fv(B)$; se A é $B \vee C$ então $fv(A)$ é a reunião dos estoques $fv(B)$ e $fv(C)$; se A é $\exists x B$ então $fv(A)$ é obtido a partir do estoque $fv(B)$ pela exclusão do pronome x.

Seja S uma assinatura dada. Consideramos que todas as estruturas e fórmulas a seguir são S-estruturas e S-fórmulas. Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são estruturas, dizemos que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$ se q é um número natural, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são sequências finitas de indivíduos em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, de mesmo comprimento, r é uma relação binária, $dom(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{M}$, $range(r)$ é um subconjunto finito do domínio de $\mathcal{N}$, os termos a_1, a_2, ... da n-upla $\overline{a}$ estão no $dom(r)$, os termos b_1, b_2, ... da n-upla $\overline{b}$ estão no $range(r)$, os pares (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... estão na relação r e

(1) $q = 0$ e se F é uma fórmula atômica tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$, e as k-uplas $(a'_1, a'_2, ...)$ e $(b'_1, b'_2, ...)$ de termos no $dom(r)$ e no $range(r)$, respectivamente, são tais que (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), ... estão na relação r, então
$$\mathcal{M} \models F[(a'_1, a'_2, ...)] \text{ sse } \mathcal{N} \models F[(b'_1, b'_2, ...)],$$
ou

(2) $q > 0$ e vale a condição de *back-and-forth*:
   (a) *(Forth)* Para todo a no domínio de $\mathcal{M}$ existe um b no domínio de $\mathcal{N}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r}$ é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.
   (b) *(Back)* Para todo b no domínio de $\mathcal{N}$ existe um a no domínio de $\mathcal{M}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r tal que $\hat{r}$ é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

Esse predicado entre r, q, $\overline{a}$ e $\overline{b}$ é definido acima por indução em q, com $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ como parâmetros.

99. Observação. Suponha que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas. Verifica-se, por indução em q, que se k é um número natural e $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$ é uma função, então r é também uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ...))$ e $(\mathcal{N}, (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ...))$. Além disso, qualquer restrição de r que contenha os pares $(a_{\sigma(1)}, b_{\sigma(1)})$, $(a_{\sigma(2)}, b_{\sigma(2)})$, ... é também uma relação de q-isomorfia parcial entre

$$(\mathcal{M}, (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ...)) \text{ e } (\mathcal{N}, (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ...)).$$

Em particular, a relação $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$ é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, e a relação vazia é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \emptyset)$ e $(\mathcal{N}, \emptyset)$.

100. Observação. Verifica-se, por indução em q, que para cada número natural q, se r é uma relação de $(q+1)$-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, então r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$. Portanto, se r é uma relação de q-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, e $p < q$, então r é uma relação de p-isomorfia parcial entre os pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$.

Dizemos que dois pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são S-estruturas, estão em uma relação de q-isomorfia parcial se existe r tal que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$.

Vamos apresentar em seguida a caracterização puramente estrutural da relação $\approx_q$, conhecida por Teorema de Fraïssé: Dois pares $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são S-estruturas, S uma assinatura finita, estão em uma relação de q-isomorfia parcial se e somente se $(\mathcal{M}, \overline{a}) \approx_q (\mathcal{N}, \overline{b})$. A primeira parte desse resultado, ou seja, a implicação direta, vale mesmo que S não seja finita.

101. Teorema. [Teorema de Fraïssé, primeira parte]

Se $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas de indivíduos em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente, estão em uma relação de q-isomorfia parcial, então para toda fórmula F tal que $rk(F) \leq q$ e $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$,

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \textit{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

Demonstração. Suponha que r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, em que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são n-uplas. Vamos provar a tese do teorema por indução na complexidade das fórmulas.

Seja F atômica tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Como r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, temos que r é também uma relação de 0-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$. Pela definição de relação de 0-isomorfia parcial,

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

Se F é $\neg G$, ou $G \vee H$, a tese segue diretamente da hipótese de indução. Precisamos provar apenas o caso em que F é $\exists x_{n+1} G$, tal que $rk(F) \leq q$ e $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$.

Nesse caso, $rk(F) > 0$, e concluímos que $q > 0$. Portanto, r é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a})$ e $(\mathcal{N}, \overline{b})$, com $q > 0$.

Suponha que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$. Por definição, para algum a em $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \models G[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Como r satisfaz a condição de *forth*, existe b em $\mathcal{N}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r que é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

Por hipótese de indução, como $rk(G) < q$, temos que $\mathcal{N} \models G[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Por definição, $\mathcal{N} \models F[\overline{b}]$.

Conversamente, se $\mathcal{N} \models F[\overline{b}]$, então, para algum b no domínio, $\mathcal{N} \models G[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Como r satisfaz a condição de *back*, existe a em $\mathcal{M}$ e uma extensão $\hat{r}$ de r que é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$.

Por hipótese de indução, como $rk(G) < q$, temos que $\mathcal{M} \models G[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Disso segue que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$. □

A partir de agora assumimos que S é uma assinatura finita. Vamos introduzir algumas notações especiais para construir S-fórmulas importantes chamadas descrições de estado. Omitiremos parênteses na definição de descrição de estado, pois os mesmos não desempenham papel relevante nesse caso. As letras ϕ, φ e ψ, com índices numéricos, são usadas para representar fórmulas apropriadas. Quando uma lista de pronomes x_1, x_2, ... é usada, assumimos que são todos distintos.

Definimos, por indução em q, uma família de conjuntos $(\Gamma^S(n, q))_{n \in \omega}$, e uma família auxiliar $(C_{q,n})_{n \in \omega}$.

Se $q = 0$, considere o conjunto finito

$$C_{0,n} = \{\phi_1, ..., \phi_m\}$$

de todas as fórmulas atômicas, na assinatura S, tais que $fv(\phi_i) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Seja $\Gamma^S(n, 0)$ o conjunto de todas as descrições de estado baseadas no conjunto $C_{0,n}$, ou seja, $\Gamma^S(n, 0)$ é o conjunto finito de todas as conjunções da forma

$$\phi_1^* \wedge ... \wedge \phi_m^*,$$

em que ϕ_i^* é ϕ_i ou $\neg\phi_i$, para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Se $q > 0$, então o conjunto $\Gamma^S(n, q)$ é obtido a partir do conjunto finito

$$\Gamma^S(n+1, q-1) = \{\varphi_1, ..., \varphi_l\}$$

do seguinte modo: $\Gamma^S(n, q)$ é o conjunto de todas as descrições de estado baseadas no conjunto

$$C_{q,n} = \{\exists x_{n+1}\varphi_1, ..., \exists x_{n+1}\varphi_l\},$$

ou seja, $\Gamma^S(n, q)$ é o conjunto finito de todas as conjunções da forma

$$(\exists x_{n+1}\varphi_1)^* \wedge ... \wedge (\exists x_{n+1}\varphi_l)^*,$$

em que $(\exists x_{n+1}\varphi_i)^*$ é $\exists x_{n+1}\varphi_i$ ou $\neg\exists x_{n+1}\varphi_i$, para cada $i \in \{1, ..., l\}$.

As descrições de estado ψ em $\Gamma^S(n, q)$ generalizam as fórmulas características das linhas de uma tabela de verdade. Por exemplo, se temos apenas um símbolo P de propriedade em S, então uma ψ em $\Gamma^S(1, 0)$ é $P(x_1)$ ou $\neg P(x_1)$, correspondendo às fórmulas características das duas linhas da tabela de verdade para um símbolo proposicional, $P(x_1)$. As quatro sentenças em $\Gamma^S(0,1)$ são como fórmulas características de uma tabela de verdade para dois símbolos proposicionais, $\exists x_1 P(x_1)$ e $\exists x_1 \neg P(x_1)$:

$$\exists x_1 P(x_1) \wedge \exists x_1 \neg P(x_1)$$

$$\exists x_1 P(x_1) \wedge \neg\exists x_1 \neg P(x_1)$$

$$\neg\exists x_1 P(x_1) \wedge \exists x_1 \neg P(x_1)$$

$$\neg\exists x_1 P(x_1) \wedge \neg\exists x_1 \neg P(x_1)$$

Veremos agora que se uma descrição de estado é satisfeita por uma n-upla de indivíduos $\overline{a}$ em uma S-estrutura $\mathcal{M}$, então ela caracteriza a classe de equivalência $[(\mathcal{M},\overline{a})]_q$.

102. Observação. Os conjuntos na família $(\Gamma^S(n,q))_{n,q\in\omega}$ são finitos, e as cardinalidades desses conjuntos satisfazem a seguinte recursão:

$$|\Gamma^S(n,q+1)| = 2^{|\Gamma^S(n+1,q)|}.$$

Os pronomes que ocorrem livres nas fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ pertencem a $\{x_1,...,x_n\}$, e o seu posto quantificacional é exatamente q. Nenhum pronome em uma fórmula em $\Gamma^S(n,q)$ ocorre tanto livre quanto ligado. A disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ é uma tautologia, e duas a duas são contrárias. Portanto, dados n e q números naturais, para todo par $(\mathcal{M},\overline{a})$, em que $\mathcal{M}$ é uma S-estrutura e $\overline{a}$ é uma n-upla em $\mathcal{M}$, existe uma única fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que $\mathcal{M}\models\psi[\overline{a}]$.

103. Teorema. [Teorema de Fraïssé, segunda parte]
Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ duas n-uplas, em $\mathcal{M}$ e em $\mathcal{N}$, respectivamente. Se para toda fórmula F tal que $rk(F)\leq q$ e $fv(F)\subseteq\{x_1,...,x_n\}$,

$$\mathcal{M}\models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N}\models F[\overline{b}],$$

então $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$ estão em uma relação de q-isomorfia parcial.

Demonstração. Vamos mostrar, por indução em q, que dados q e n números naturais, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ duas S-estruturas, e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ duas n-uplas em $\mathcal{M}$ e em $\mathcal{N}$, se existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que

$$\mathcal{M}\models\psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{N}\models\psi[\overline{b}],$$

então $r=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$ é uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M},\overline{a})$ e $(\mathcal{N},\overline{b})$, donde cada fórmula em $\Gamma^S(n,q)$ que é satisfeita por alguma n-upla de indivíduos em alguma estrutura de fato desempenha o papel de descrição de estado e caracteriza a classe de q-equivalência correspondente. Como a disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n,q)$ é uma tautologia, e duas a duas são contrárias, a hipótese que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ tal que

$$\mathcal{M}\models\psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{N}\models\psi[\overline{b}],$$

é equivalente à hipótese que para toda fórmula ψ em $\Gamma^S(n,q)$ vale que

$$\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models \psi[\overline{b}].$$

$q = 0$: Suponha que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n, 0)$ tal que

$$\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{N} \models \psi[\overline{b}]. \tag{1}$$

Como ψ está em $\Gamma^S(n, 0)$, cada uma das fórmulas atômicas com pronomes na lista x_1, ..., x_n ocorre afirmada ou negada em ψ. Desse modo, a condição (1) implica que se F é uma fórmula atômica tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$, e as k-uplas $(a'_1, a'_2, ...)$ e $(b'_1, b'_2, ...)$ de termos no $dom(r)$ e no $range(r)$, respectivamente, são tais que (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), ... estão na relação r, então

$$\mathcal{M} \models F[(a'_1, a'_2, ...)] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[(b'_1, b'_2, ...)].$$

De fato, suponha que o par (a'_i, b'_i) está na relação r, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, ou seja, que $\{(a'_1, b'_1), ..., (a'_k, b'_k)\} \subseteq \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}$. Seja

$$\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$$

uma função tal que $(a'_i, b'_i) = (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Agora,

$$\mathcal{M} \models F[(a'_1, a'_2, ...)] \text{ é o mesmo que } \mathcal{M} \models F[(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ...)]$$

e

$$\mathcal{M} \models F[(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ...)] \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...][\overline{a}]. \tag{2}$$

Como $F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...]$ é uma fórmula atômica tal que

$$fv(F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...]) \subseteq \{x_1, ..., x_n\},$$

ela ocorre afirmada ou negada em ψ. Como $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$ se e somente se $\mathcal{N} \models \psi[\overline{b}]$, temos que

$$\mathcal{M} \models F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...][\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...][\overline{b}]. \tag{3}$$

Além disso,

$$\mathcal{N} \models F[(b'_1, b'_2, ...)] \text{ é o mesmo que } \mathcal{N} \models F[(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ...)]$$

e

$$\mathcal{N} \models F[(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ...)] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F_{x_1,x_2,...}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...][\overline{b}]. \tag{4}$$

De (2), (3) e (4), segue que

$$\mathcal{M} \models F[(a'_1, a'_2, ...)] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[(b'_1, b'_2, ...)].$$

$q > 0$: Suponha que existe uma fórmula ψ em $\Gamma^S(n, q)$ tal que

$$\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}] \text{ e } \mathcal{B} \models \psi[\overline{b}]. \tag{5}$$

Vamos provar que r satisfaz a condição de *back-and-forth*. Se a é um indivíduo de $\mathcal{M}$, então existe uma única fórmula ϕ em $\Gamma^S(n+1, q-1)$ tal que $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Portanto,

$$\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{a}],$$

de onde concluímos que a fórmula $\exists x_{n+1}\phi$ ocorre afirmada em ψ. Como $\mathcal{N} \models \psi[\overline{b}]$, segue que

$$\mathcal{N} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}],$$

e existe um indivíduo b de $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Por hipótese de indução, a relação

$$\hat{r} = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1})\}$$

é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$, e r satisfaz a condição de *forth*.

Conversamente, se b é um indivíduo de $\mathcal{N}$, então existe uma única fórmula ϕ em $\Gamma^S(n+1, q-1)$ tal que $\mathcal{N} \models \phi[\overline{b}\,\hat{}\,b]$. Portanto,

$$\mathcal{N} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{b}],$$

de onde concluímos que a fórmula $\exists x_{n+1}\phi$ ocorre afirmada em ψ. Como $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$, segue que

$$\mathcal{M} \models \exists x_{n+1}\phi[\overline{a}],$$

e existe um indivíduo a de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}\,\hat{}\,a]$. Por hipótese de indução, a relação

$$\hat{r} = \{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1})\}$$

é uma relação de $(q-1)$-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, \overline{a}\,\hat{}\,a)$ e $(\mathcal{N}, \overline{b}\,\hat{}\,b)$, e r satisfaz a condição de *back*. $\square$

104. Exercício. Demonstre, por indução em q, que se k é um número natural e $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$ é uma função, então r é também uma relação de q-isomorfia parcial entre $(\mathcal{M}, (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ...))$ e $(\mathcal{N}, (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, ...))$. Demonstre que $|\Gamma^S(n, q+1)| = 2^{|\Gamma^S(n+1,q)|}$. Demonstre também que a disjunção das fórmulas em $\Gamma^S(n, q)$ é uma tautologia, e que quaisquer duas dessas fórmulas são contrárias.

2. Caracterização dos Predicados Definíveis

Apresentamos uma importante caracterização devida a Fraïssé dos predicados definidos por fórmulas, relativamente a uma classe de estruturas. Se S é uma assinatura finita contendo símbolos de predicado de aridade maior que zero, $\mathbf{K}$ é uma classe de S-estruturas e n é um número maior que zero, dizemos que Q é um predicado n-ário com argumento em $\mathbf{K}$ (predicado n-ário, de modo abreviado) se Q atribui, para cada S-estrutura $\mathcal{M}$ que está em $\mathbf{K}$, um subconjunto do conjunto de todas as n-uplas de indivíduos de $\mathcal{M}$.

Denotamos por $\mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$ o conjunto associado a $\mathcal{M}$ por Q. Dizemos que Q é definível se e somente se existe uma fórmula F na assinatura S tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, e para cada S-estrutura $\mathcal{M}$ que está em $\mathbf{K}$ e cada n-upla $\overline{a}$ de indivíduos de $\mathcal{M}$,

$$\overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}} \text{ se e somente se } \mathcal{M} \models F[\overline{a}].$$

Dizemos nesse caso que F com x_1, x_2, ... define em $\mathbf{K}$ o predicado n-ário Q. A escolha da lista de pronomes x_1, x_2, ... não é relevante, apenas o comprimento da lista de pronomes em F o é.

Um predicado n-ário Q, com argumento em $\mathbf{K}$, é preservado por q-equivalência se e somente se para todas estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ que estão em $\mathbf{K}$, todas n-uplas $\overline{a}$ e $\overline{b}$ de indivíduos de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente,

$$\text{Se } (\mathcal{M},\overline{a}) \approx_q (\mathcal{N},\overline{b}), \text{ então } \overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}} \text{ se e somente se } \overline{b} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{N}}$$

105. Teorema. [Teorema fundamental da teoria das definições]

Um predicado n-ário Q é definível se e somente se existe um número natural q tal que Q é preservado por q-equivalência. Além disso, se q é um número natural, então um predicado n-ário Q é definido por uma fórmula F tal que $rk(F) = q$ e $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ se e somente se Q é preservado por q-equivalência.

Demonstração. Basta demonstrar a segunda afirmação. Assuma que Q é preservado por q-equivalência, para algum número q. Como $n > 0$ o conjunto $\Gamma^S(n,q)$ não é vazio. Considere o conjunto

$$\left\{\psi \in \Gamma^S(n,q) : \text{ Existe um par } (\mathcal{M},\overline{a}) \text{ tal que } \mathcal{M} \in \mathbf{K},\ \mathcal{M} \models \psi[\overline{a}] \text{ e } \overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}\right\}.$$

Vamos representar esse conjunto finito por $\Delta^q(\mathrm{Q})$. Se $\Delta^q(\mathrm{Q})$ é vazio, então Q é trivialmente definido por qualquer fórmula contraditória da assinatura S. Caso contrário, o predicado n-ário Q é definido pela disjunção das fórmulas em $\Delta^q(\mathrm{Q})$, que é uma fórmula F de posto quantificacional q e tal que $fv(F) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$. Vamos verificar que para cada estrutura $\mathcal{M} \in \mathbf{K}$ e cada n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$ se e somente se $\overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$.

Primeiro, vamos verificar a implicação direta. Para cada estrutura $\mathcal{M} \in \mathbf{K}$ e cada n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$, então para alguma $\psi \in \Delta^q(\mathrm{Q})$,

$$\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}].$$

Entretanto, como $\psi \in \Delta^q(\mathrm{Q})$, existe um par $(\mathcal{N},\overline{b})$, com $\mathcal{N} \in \mathbf{K}$, tal que

$$\mathcal{N} \models \psi[\overline{b}] \text{ e } \overline{b} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{N}}.$$

Como $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$ e $\mathcal{N} \models \psi[\overline{b}]$, segue, pelo teorema de Fraïssé, que

$$(\mathcal{M},\overline{a}) \approx_q (\mathcal{N},\overline{b}).$$

Portanto, $\overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$, pois Q é preservado por q-equivalência e $\overline{b} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{N}}$.

Por outro lado, para cada estrutura $\mathcal{M} \in \mathbf{K}$ e cada n-upla $\overline{a}$ em $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$ para uma, e apenas uma, descrição de estado $\psi \in \Gamma^S(n,q)$. Se $\overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$, então $\psi \in \Delta^q(\mathrm{Q})$. Consequentemente, pela definição da fórmula F, temos que $\mathcal{M} \models F[\overline{a}]$, e a implicação conversa está verificada.

Agora, assuma que Q é definido por uma fórmula F de posto quantificacional q, para algum número q. Se $(\mathcal{M},\overline{a}) \approx_q (\mathcal{N},\overline{b})$, com $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ estruturas em $\mathbf{K}$, então, como o posto quantificacional de F é q,

$$\mathcal{M} \models F[\overline{a}] \text{ se e somente se } \mathcal{N} \models F[\overline{b}].$$

O que significa que $\overline{a} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$ se e somente se $\overline{b} \in \mathrm{Q}^{\mathcal{N}}$, e Q é preservado por q-equivalência. □

Como apenas uma quantidade finita de símbolos pode ocorrer em uma fórmula, a condição de finitude de S não é uma restrição importante para a definibilidade. De fato, considere S uma assinatura não necessariamente finita, **K** uma classe de S-estruturas e n um número maior que zero. Podemos definir a noção de predicado n-ário com argumento em **K** definível por uma fórmula como antes. Se S' é uma assinatura finita contida em S, podemos definir a classe $\mathbf{K}'$ dos redutos para S' das S-estruturas em **K**. Vamos caracterizar a definibilidade de predicados nesse novo contexto.

Seja Q um predicado n-ário com argumento em **K**. Dizemos que existe um predicado n-ário com argumento em $\mathbf{K}'$ e associado a Q pelo reduto a S' se $\mathrm{Q}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Q}^{\mathcal{N}}$ quaisquer que sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ em **K** cujos redutos para S' são iguais. Tal condição permite caracterizar a definibilidade de Q em termos do teorema fundamental da teoria das definições. Quando a condição é satisfeita, dizemos que o predicado n-ário Q' com argumento em $\mathbf{K}'$ definido por $\mathrm{Q}'^{\mathcal{M}'} = \mathrm{Q}^{\mathcal{M}}$, em que $\mathcal{M}'$ é o reduto de $\mathcal{M}$ para S', é o predicado associado a Q pelo reduto a S'.

Segue a caracterização da definibilidade. A condição necessária e suficiente para que um predicado n-ário Q com argumento em **K** seja definido por uma fórmula F cujos símbolos estão em S' é que exista um predicado n-ário com argumento em $\mathbf{K}'$ e associado a Q pelo reduto a S', e que tal predicado associado a Q pelo reduto a S' seja definido por F. Por um lado, se Q é definido por uma fórmula F cujos símbolos estão em S', então existe um predicado n-ário com argumento em $\mathbf{K}'$ e associado a Q pelo reduto a S'. Nesse caso, o predicado associado a Q pelo reduto a S' também é definido por F, e assim a condição é satisfeita. Por outro lado, se existe um predicado n-ário com argumento em $\mathbf{K}'$ e associado a Q pelo reduto a S', e o predicado associado a Q pelo reduto a S' é definido por uma fórmula F, então Q também é definido por F e a condição é suficiente.

106. Exercício. Sejam S uma assinatura e $\mathcal{M}$ uma S-estrutura. Suponha que cada sentença A possui um nome em S representado por $\ulcorner A \urcorner$. Seja Γ o estoque de sentenças em S que são satisfeitas em $\mathcal{M}$, e F e x uma fórmula em S e um pronome, respectivamente. Considere **K** a classe constituída por $\mathcal{M}$ apenas. Seja T o predicado 1-ário com argumento em **K** determinado por $a \in \mathrm{T}^{\mathcal{M}}$ se e somente se existe uma sentença A tal que a é $\ulcorner A \urcorner^{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M} \models A$. Mostre que F com x define em **K** o predicado 1-ário T se e somente se para cada sentença A, temos $\mathcal{M} \models A$ se e somente se $F_x[\ulcorner A \urcorner]$ está em Γ. Relacione isso com a noção de definibilidade presente no teorema de Gödel-Tarski.

APÊNDICE A

Fórmulas

1. Primeiras Definições e Propriedades

Os símbolos primitivos são vírgula (,), parênteses, nomes próprios (f, g, h, f', g', h' ...), pronomes (i, j, k, i', j', k', ...) e símbolos para quantificação existencial ($\exists$), para disjunção ($\vee$), para negação ($\neg$), para proposições atômicas e predicados de aridade finita (L, M, N, L', M', N', ...). Estipulamos que símbolos para proposições atômicas são símbolos de predicado de aridade zero, e nos referimos coletivamente aos símbolos para proposições atômicas e para predicados de aridade maior que zero como símbolos de predicado, simplesmente. Os símbolos $\neg$, $\vee$ e $\exists$ são chamados símbolos lógicos.

A noção de fórmula pode ser definida: Uma expressão é uma fórmula atômica ou de complexidade 0 se e somente se é um símbolo para proposição atômica entre parênteses ou é $P(t, u, v, ...)$, em que P é um símbolo de predicado e t, u, v, ... são nomes em quantidade correspondente à aridade de P. Uma expressão é uma fórmula de complexidade menor ou igual a $n + 1$ se e somente se é $\neg A$, $(A \vee B)$, $\exists x A$ ou fórmula atômica, em que A e B são fórmulas de complexidade menor ou igual a n e x é um pronome qualquer. Uma expressão é uma fórmula se e somente se é uma fórmula de complexidade menor ou igual a n, para algum n.

Podemos definir também a complexidade de uma fórmula como segue: Uma fórmula A é de complexidade n se e somente se A é de complexidade menor ou igual a n e não é de complexidade menor ou igual a m, para qualquer m menor que n.

A ocorrência destacada de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em cada uma das fórmulas $\neg A$, $(A \vee B)$ e $\exists x A$ é a ocorrência principal da respectiva fórmula, que é dita ser uma negação no primeiro caso, uma disjunção no segundo e uma existencial no terceiro. A fórmula A é chamada de escopo da existencial $\exists x A$ e da negação $\neg A$. As fórmulas A e B são chamadas de componentes da disjunção $(A \vee B)$.

Usamos símbolos do estoque original apenas na medida da necessidade. Não usamos todos os símbolos de uma vez, pois é importante termos símbolos novos (que não ocorrem nas fórmulas da vez) disponíveis para propósitos diversos. Em geral, para garantir que temos sempre disponível um estoque ilimitado de símbolos novos basta estipular que, até atingir o número de símbolos desejado no momento, alternamos, no estoque original, entre símbolos usados e símbolos não usados na cláusula atômica da definição acima.

Vamos estabelecer duas propriedades importantes das fórmulas, relacionadas à contagem de parênteses, nos lemas seguintes.

107. Lema. [Primeiro lema dos parênteses]
O número de ocorrências do parêntese esquerdo em uma fórmula A é igual ao número de ocorrências do parântese direito. Toda fórmula A termina em uma ocorrência do parêntese direito.

Demonstração. Vamos demonstrar o lema por indução na complexidade de A.

Passo base:

Se A é uma fórmula de complexidade 0, então ou A é um símbolo para proposição atômica entre parênteses ou A é $P(t, u, v, ...)$. Nos dois casos A possui uma ocorrência do parêntese esquerdo e uma ocorrência do parêntese direito e termina em uma ocorrência do parêntese direito.

Passo indutivo:

Se A é uma fórmula de complexidade menor ou igual a $n + 1$, então A é $\neg B$, $(B \vee C)$ ou $\exists xB$, em que B e C são fórmulas de complexidade menor ou igual a n. No primeiro e no terceiro casos o número de ocorrências do parêntese esquerdo em A é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em B, e do mesmo modo para o número de ocorrências do parêntese direito. Além disso, o último termo de A é o último termo de B nesses dois casos. No segundo caso A termina em uma ocorrência do parêntese direito e o número de ocorrências do parêntese esquerdo em A é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em B mais o número de ocorrências do parêntese esquerdo em C mais um, e do mesmo modo para o número de ocorrências do parêntese direito. Por hipótese de indução, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em B e em C é igual ao número de ocorrências do parêntese direito, e ambas terminam em um parêntese direito. Portanto, em qualquer caso, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em A é igual ao número de ocorrências do parêntese direito e o último termo de A é o parêntese direito. □

Uma fórmula é uma cadeia de símbolos. Se A é uma fórmula, então uma parte esquerda de A é uma cadeia de símbolos consecutivos em A cujo primeiro símbolo é o primeiro símbolo de A. Está implícito que uma parte esquerda tem pelo menos um símbolo. Analogamente, uma parte direita de A é uma cadeia de símbolos consecutivos em A cujo último símbolo é o último símbolo de A. Nos referimos às posições em uma cadeia e aos símbolos que as marcam como termos dessa cadeia.

108. Lema. [Segundo lema dos parênteses]
Se E é uma parte esquerda de uma fórmula que não é a própria fórmula, então o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é maior ou igual ao número de ocorrências do parântese direito, e é estritamente maior se E contém pelo menos uma ocorrência de parêntese.

Demonstração. Vamos demonstrar o enunciado por indução no número de ocorrências de símbolos da parte esquerda E.

Passo base:

Se E tem apenas um termo, então esse termo é um parêntese apenas no caso em que E é parte esquerda de uma disjunção ou é parte esquerda de uma fórmula que é apenas um símbolo para proposição atômica entre parênteses, e é um parêntese esquerdo nesses casos. Portanto, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é maior ou igual ao número de ocorrências do parântese direito, e é estritamente maior se E contém pelo menos uma ocorrência de parêntese.

Passo indutivo:

Se E tem mais de um termo e E é parte esquerda de uma fórmula que é apenas um símbolo para proposição atômica entre parênteses, e não é a própria fórmula, então E é formada pelo parêntese esquerdo seguido do símbolo para proproposição atômica da fórmula. Nesse caso, temos a conclusão. Restam, portanto, quatro casos. Se E é parte esquerda de $P(t, u, v, ...)$, então E contém a única ocorrência do parêntese esquerdo da fórmula. Como E não é a própria fórmula, E não contém o parêntese direito. Se E é parte esquerda de $\neg A$, então E é da forma $\neg E'$, em que E' é parte esquerda de A que não é a própria A. O número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em E', e do mesmo modo para o parêntese direito. Por hipótese de indução, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E' é maior ou igual ao número de ocorrências do parântese direito, e é estritamente maior se E' contém algum parêntese. Se E é parte esquerda de $\exists xA$, então E é $\exists x$ ou da forma $\exists xE'$, em que E' é parte esquerda de A e não é a própria A. O número de ocorrências do parêntese esquerdo de E é zero na primeira alternativa e igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo de E' na segunda, e do mesmo modo para o parêntese direito. Por hipótese de indução, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E' é maior ou igual ao número de ocorrências do parântese direito, e é estritamente maior se E' contém algum parêntese. Em todos os casos temos o resultado para E.

Resta apenas o caso em que E é parte esquerda de $(A \vee B)$ e não é a própria $(A \vee B)$. Nesse caso, E é da forma $(E'$, em que E' é parte esquerda de A, ou é $(A\vee$, ou é da forma $(A \vee E''$, em que E'' é parte esquerda de B. Na primeira alternativa o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em E' mais um, e o número de ocorrências do parêntese direito em E é o número de ocorrências do parêntese direito em E'. Por hipótese de indução, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E' é maior ou igual ao número de ocorrências do parântese direito. Na segunda alternativa o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em A mais um, e o número de ocorrências do parêntese direito em E é o número de ocorrências do parêntese direito em A, que é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em A. Na terceira alternativa, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo em A mais o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E'' mais um, e o número de ocorrências do parêntese direito em E é o número de ocorrências do parêntese direito em A mais o número de ocorrências do parêntese direito em E''.

Por hipótese de indução, o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E'' é maior ou igual ao número de ocorrências do parêntese direito em E''. Concluímos que em todas as alternativas o número de ocorrências do parêntese esquerdo em E é estritamente maior que número de ocorrências do parêntese direito em E, o que termina a demonstração. □

109. Observação. Se D é uma parte direita de uma fórmula A, então o número de ocorrências do parêntese direito em D é maior ou igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo. De fato, ou D é a própria A, e temos a igualdade nesse caso, ou A é ED, em que E é a parte esquerda complementar a D em A. Como em ED temos o mesmo número de ocorrências dos parênteses esquerdo e direito, do segundo lema dos parênteses segue que o número de ocorrências do parêntese direito em D é maior ou igual ao número de ocorrências do parêntese esquerdo, e é estritamente maior se E contém algum parêntese.

Dos lemas segue que uma parte esquerda de uma fórmula que não é a própria fórmula não é uma fórmula. De fato, seja E uma parte esquerda de A que não é a fórmula toda. Se E não contém um parêntese, então E não é uma fórmula, pois, pelo primeiro lema dos parênteses, o último termo de qualquer fórmula é o parêntese direito. Se E contém pelo menos um parêntese, então, pelo segundo lema dos parênteses, E contém mais parênteses esquerdos que direitos. Novamente, pelo primeiro lema dos parênteses, E não é uma fórmula.

110. Exercício. Defina, por indução na complexidade, o número máximo de ocorrências encaixadas de símbolos lógicos em uma fórmula A. Demonstre, por indução em n, que uma fórmula A é de complexidade n se e somente se o número máximo de ocorrências encaixadas de símbolos lógicos em A é igual a n.

2. Subfórmulas e Leitura Única

Se A é uma fórmula, então uma cadeia de símbolos consecutivos em A que é ela própria uma fórmula é uma subfórmula de A. Vimos acima que uma parte esquerda de uma fórmula que não é a própria fórmula não é uma subfórmula. Queremos caracterizar completamente as subfórmulas de uma fórmula dada. O primeiro passo é o importante lema a seguir sobre a ocorrência de subfórmulas, segundo o qual cada ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em uma fórmula é a ocorrência principal de alguma subfórmula.

111. Lema. [Lema da ocorrência de subfórmulas]
Cada ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em uma fórmula qualquer é a ocorrência principal de alguma subfórmula da fórmula dada.

Demonstração. Seja A uma fórmula qualquer. Vamos mostrar, por indução na complexidade, que qualquer ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A é a ocorrência principal de alguma subfórmula de A. Se A é uma fórmula atômica, então não há ocorrências de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A, e o passo base está demonstrado.

Suponhamos que A é $\neg B$, e que B satisfaz a condição que queremos demonstrar para A. Segue que cada ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A que está em B é a ocorrência principal de uma subfórmula de B. Por definição, essa subfórmula também é subfórmula de A, e isso mostra que as ocorrências de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A que são também ocorrências em B satisfazem a condição. Resta mostrar apenas que a única ocorrência de $\neg$ em A que não está em B também satisfaz a condição. Mas essa ocorrência é a ocorrência principal da própria A, e esse caso está concluído.

Agora, se A é $(B \vee C)$, em que B e C satisfazem a condição que queremos demonstrar para A, então cada ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A que está em B ou em C é a ocorrência principal de uma subfórmula de A. Além disso, a única ocorrência de $\vee$ que não está em B e não está em C é, também, a ocorrência principal de uma subfórmula, a própria A, o que conclui esse caso.

Do mesmo modo, se A é $\exists xB$, em que B satisfaz a condição que queremos demonstrar para A, então cada ocorrência de $\neg$, $\vee$ e $\exists$ em A que está em B é a ocorrência principal de uma subfórmula de A. A única ocorrência de $\exists$ que não está em B é a ocorrência principal da própria A, e o resultado está demonstrado. □

Com a noção de subfórmula podemos definir as noções de ocorrência ligada e de ocorrência livre de um pronome. Se x é um pronome e A é uma fórmula, dizemos que uma ocorrência de x em A é uma ocorrência ligada se está em uma subfórmula do tipo $\exists xB$ de A. As ocorrências de x em A que não são ligadas são chamadas de ocorrências livres.

Chegamos agora à caracterização completa das subfórmulas de uma fórmula dada, apresentada no lema abaixo. Da caracterização temos que não há ambiguidade na leitura das fórmulas.

112. Lema. [Lema da leitura única]

A única subfórmula de uma fórmula atômica é ela própria. Uma subfórmula de uma negação é a própria negação ou uma subfórmula do seu escopo. Uma subfórmula de uma disjunção é a própria disjunção ou uma subfórmula de uma das suas componentes. Uma subfórmula de uma existencial é a própria existencial ou uma subfórmula do seu escopo.

Demonstração. Se A é uma fórmula atômica e contém apenas um símbolo para proposição atômica entre parênteses, então é claro que a única subfórmula de A é ela própria. Se A é $P(t, u, v, ...)$, então o símbolo inicial P ocorre em qualquer subfórmula de A. De fato, uma subfórmula é uma fórmula, e não há uma fórmula em que apenas nomes, vírgulas e parênteses ocorrem. Como P apenas não é uma fórmula, uma subfórmula de A deve conter a ocorrência do parêntese esquerdo que sucede o símbolo P, e como o número de ocorrências do parêntese esquerdo é igual ao número de ocorrências do parêntese direito em qualquer fórmula, uma subfórmula de A contém também a ocorrência final do parêntese direito. Portanto, uma subfórmula de A contém o primeiro e o último termos de A, e é a própria A.

Uma subfórmula da negação $\neg A$ que não contém o termo inicial $\neg$ é, por definição, uma subfórmula do escopo A. Resta mostrar que uma subfórmula de $\neg A$ da forma

$\neg E$, em que E é parte esquerda de A, é a própria $\neg A$. Se $\neg E$ é uma fórmula, então E contém pelo menos uma ocorrência do parêntese direito, pois toda fórmula termina com parêntese direito. Se E não é a própria A, então, pelo segundo lema dos parênteses, E contém mais ocorrências do parêntese esquerdo que do direito. Como as ocorrências de parênteses em $\neg E$ correspondem às ocorrências de parênteses em E, há mais ocorrências do parêntese esquerdo que do direito em $\neg E$ e $\neg E$ não é fórmula. Portanto, se $\neg E$ é fórmula, então E é A e o resultado está demonstrado nesse caso.

Uma subfórmula da existencial $\exists xA$ que está inteira contida em A é, por definição, uma subfórmula de A. Resta mostrar que se uma subfórmula de $\exists xA$ não está contida em A, então ela é a própria $\exists xA$. Em primeiro lugar, observamos que nenhuma fórmula começa por um pronome x: As fórmulas atômicas não começam com um pronome, as negações começam com $\neg$, as existenciais começam com $\exists$ e as disjunções começam com o parêntese esquerdo. Portanto, uma subfórmula de $\exists xA$ que não está contida em A é da forma $\exists xE$, em que E é parte esquerda de A. Como as ocorrências de parênteses em $\exists xE$ correspondem às ocorrências de parênteses em E, há mais ocorrências do parêntese esquerdo que do direito em $\exists xE$ e $\exists xE$ não é fórmula.

Agora, seja C uma subfórmula da disjunção $(A \vee B)$ que não é subfórmula de A e não é subfórmula de B. Sabemos que C contém a ocorrência inicial do parêntese esquerdo, ou a ocorrência principal de $\vee$ ou a ocorrência final do parêntese direito. Uma cadeia de símbolos consecutivos em $(A \vee B)$ que contém a ocorrência inicial do parêntese esquerdo é a própria $(A \vee B)$ ou de um dos três tipos: $(E$, $(A\vee$, $(A \vee E'$, em que E é parte esquerda de A e E' é parte esquerda de B. A fórmula C não pode ser de um desses três tipos porque o número de ocorrências do parêntese esquerdo é maior que o número de ocorrências do parêntese direito em todos os casos. Analogamente, uma cadeia de símbolos consecutivos em $(A \vee B)$ que contém a ocorrência final do parêntese direito é a própria $(A \vee B)$ ou de um dos três tipos: $D \vee B)$, $\vee B)$, $D')$, em que D é parte direita de A e D' é parte direita de B. A fórmula C não pode ser de um desses três tipos porque o número de ocorrências do parêntese direito é maior que o número de ocorrências do parêntese esquerdo em todos os casos.

Finalmente, vamos considerar uma cadeia de símbolos consecutivos em $(A \vee B)$ que contém a ocorrência principal de $\vee$, mas não contém a ocorrência inicial do parêntese esquerdo nem a ocorrência final do parêntese direito. Uma tal cadeia é de um dos três tipos: $D\vee$, $\vee E'$, $D \vee E'$, em que D é parte direita de A e E' é parte esquerda de B. A fórmula C não pode ser do primeiro tipo porque uma fórmula não termina com $\vee$; também não pode ser do segundo tipo porque uma fórmula não começa com $\vee$. Suponhamos que C seja do terceiro tipo. Pelo lema da ocorrência de subfórmulas, a ocorrência destacada de $\vee$ em C é a ocorrência principal de uma subfórmula C_1 de C. Ou seja, C_1 também é do tipo $D \vee E'$, em que D é parte direita da A e E' é parte esquerda de B, e, além disso, C_1 é uma disjunção e a ocorrência destacada de $\vee$ é a ocorrência principal de C_1. Essa propriedade adicional não é garantida para C, por isso precisamos passar para a subfórmula C_1. Agora, como C_1 é uma disjunção, C_1 começa com o parêntese esquerdo e termina com o parêntese direito. Portanto, C_1 é uma disjunção da forma $(G \vee H)$, em que G é fórmula, H é fórmula, $H)$ é parte esquerda de B e $(G$ é parte direita de A. Mas isso é impossível, pois $H)$ é parte esquerda de B e contém um parêntese, o que implica que o número de ocorrências do parêntese esquerdo em $H)$ é estritamente maior que o número de ocorrências do parêntese direito, portanto que o número do ocorrências do parêntese esquerdo em H é estritamente maior que o número de ocorrências do parêntese direito, e H não é uma fórmula. $\square$

Vamos mostrar agora que não há ambiguidade na escrita de fórmulas. Por exemplo, não há uma cadeia de símbolos que é uma negação $\neg A$ e é também uma disjunção $(B \vee C)$. De fato, não há cadeia de símbolos tal que a primeira ocorrência é uma ocorrência de $\neg$ e também é uma ocorrência de (. De modo geral, se duas fórmulas correspondem à mesma cadeia de símbolos, então uma seria subfórmula da outra. Mas isso é impossível segundo o lema da leitura única, pois o comprimento de uma fórmula é estritamente maior que o comprimento de qualquer subfórmula que não é a própria fórmula. Em particular, em uma cadeia de símbolos que é uma fórmula de complexidade maior que zero há uma única ocorrência principal de símbolo lógico $\neg$, $\vee$ e $\exists$.

Para dar um exemplo de escrita ambígua, que é econômica em termos de ocorrências de parênteses, considere a cadeia de símbolos $\neg A \vee B$, em que A e B são fórmulas. Há uma insuficiência de ocorrências de parênteses nessa escrita, o que não ocorre na escrita oficial. É possível desambiguar essa escrita de dois modos, $(\neg A \vee B)$ e $\neg(A \vee B)$, o que resulta em uma disjunção no primeiro caso e em uma negação no segundo. Contudo, há várias convenções estabelecidas para usar uma escrita mais econômica que a oficial. Por exemplo, podemos eliminar os parênteses que cercam os símbolos para proposições atômicas e estipular que, em caso de dúvida, a ocorrência principal é sempre de uma disjunção. Sob essa convenção, a escrita $\neg A \vee B$ não é ambígua, ela corresponde à fórmula $(\neg A \vee B)$.

113. Exercício. Seja A uma fórmula. Depois de lembrar a definição de instância, demonstre que uma instância de uma subfórmula de uma instância de uma subfórmula de A é, por sua vez, uma instância de uma subfórmula de A.

APÊNDICE B

A Teoria de Zermelo-Fraenkel

1. Axiomas

Neste apêndice introduzimos axiomas que, adicionados ao sistema dedutivo do capítulo 2, formam uma representação simbólica considerada padrão da matemática. Contudo, essa imagem formal da matemática, ou de parte dela, também tem interesse próprio como teoria matemática autônoma, e é intensamente estudada por si. É assim que essa teoria será apresentada aqui, como tendo interesse independente, não como mero recurso formal que é resultado da tentativa de atingir uma representação simbólica da matemática.

Os axiomas de uma teoria matemática não são escolhidos ao acaso, mas segundo uma direção de investigação, uma ideia que a teoria pretende seguir. Entendemos que essa direção ou ideia pode ser caracterizada por meio de uma lista de princípios diretivos instituídos historicamente, e ela prescreve o próprio padrão de correção por trás da teoria. Vamos apresentar uma tal lista para a teoria de Zermelo-Fraenkel e, em seguida, uma explicação detalhada de cada princípio. Depois apresentaremos os axiomas de ZF, que são justificados a partir da ideia formulada pelos princípios diretivos.

(1) Um conjunto deve ser determinado por seus elementos que, por sua vez, devem ser conjuntos determinados por seus elementos.

(2) Não pode haver regresso infinito na determinação de um conjunto a partir dos seus elementos.

(3) Uma seleção arbitrária de elementos de um conjunto deve determinar um conjunto, que deve ser um subconjunto do conjunto original.

(4) Uma troca arbitrária de cada elemento de um conjunto por um conjunto qualquer deve determinar um conjunto.

(5) Os elementos dos elementos de um conjunto devem determinar um conjunto.

(6) Os subconjuntos de um conjunto devem determinar um conjunto.

(7) Deve haver um conjunto infinito.

O primeiro princípio prescreve que os elementos de um conjunto são também conjuntos, e não há conjuntos distintos tais que todo elemento de um deles é também elemento do outro. Em particular, se dois conjuntos são distintos então deve haver pelo menos um elemento em um desses conjuntos.

O segundo princípio prescreve que a determinação transitiva dos conjuntos por seus elementos não pode envolver um regresso infinito, caso contrário não poderíamos falar que os conjuntos são determinados a partir dos seus elementos. Se a é um conjunto e b é um elemento de a, então a é determinado, em parte, a partir de b. Para isso, devemos ter que b, ele próprio, é determinado. Mas b também é um conjunto e se c é um elemento de b, então b é determinado em parte a partir de c, que deve estar determinado, e assim sucessivamente. Para não cair em um regresso infinito na determinação transitiva de a, um conjunto sem elementos deve ser atingido nesse processo, que é assim interrompido, independentemente das escolhas sucessivas dos supostos elementos b, c, etc. A existência de um conjunto sem elementos não é conflitante com o primeiro princípio, desde que não haja dois conjuntos sem elementos, pois, nesse caso, o mesmo é determinado (por seus elementos).

O princípio (3) prescreve que dado um conjunto e dada uma seleção qualquer de elementos desse conjunto, deve haver um conjunto cujos elementos são aqueles escolhidos do conjunto dado. O princípio (4) prescreve que dado um conjunto e dada uma correspondência entre elementos desse conjunto e conjuntos quaisquer, deve haver um conjunto cujos elementos são os conjuntos correspondentes aos elementos do conjunto dado. O novo conjunto é obtido pela troca de cada elemento do conjunto original pelo conjunto correspondente.

O princípio (5) prescreve que para cada conjunto há um conjunto cujos elementos são os elementos dos elementos do conjunto dado, e é chamado de união do conjunto dado. O princípio (6) prescreve que para cada conjunto há um conjunto cujos elementos são os subconjuntos do conjunto dado e é chamado de conjunto das partes do conjunto dado. O princípio (7) prescreve que deve haver um conjunto com infinitos elementos.

Conforme exposto acima, uma axiomatização para a teoria de conjuntos deve ser justificada a partir dos princípios diretivos, e apresentamos a seguir uma lista de axiomas assim justificados para a teoria de conjuntos. O sistema formal resultante da adição desses axiomas ao sistema dedutivo da lógica de primeira ordem é conhecido como ZF.

De início, apenas dois símbolos de predicado binários ocorrem nas fórmulas do nosso sistema. Como é usual, outros símbolos são introduzidos com descrições. As fórmulas atômicas iniciais da teoria de conjuntos são representadas por $x \in y$ e $x = y$, para x e y pronomes quaisquer. É conveniente enfatizar que não há restrições para a ocorrência de pronomes em fórmulas atômicas: Podemos escrever $x \in x$, também podemos escrever $x \in y \vee y \in z$. Há apenas uma categoria sintática de pronomes, e não duas categorias 'pronomes para elementos' e 'pronomes para conjuntos'. As fórmulas que são negações de atômicas são representadas por $x \notin y$ e $x \neq y$, como é usual.

Na formulação abaixo assumimos que os pronomes x, y, z, w, x_1, y_1, x_2 e y_2 são distintos. Para simplificar a notação, vários axiomas são apresentados como fórmulas com ocorrências livres de pronomes. Apenas o axioma do infinito é apresentado como uma sentença. Contudo, para cada fórmula podemos obter, pela prefixação de uma quantificação universal para cada pronome com ocorrências livres, uma sentença a partir da qual a fórmula original é dedutível e que é dedutível a partir da fórmula original.

- Axiomas da igualdade:

$$x = x$$

$$(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2)$$

$$(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \to (x_1 \in x_2 \to y_1 \in y_2)$$

A fórmula $x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ é dedutível a partir dos axiomas da igualdade. De fato, trata-se de um caso particular do teorema da indiscernibilidade dos iguais. A equivalência obtida como consequência tautológica dessa implicação e de sua conversa, fornecida pelo próximo axioma, é uma formalização do primeiro princípio.

- Axioma da extensionalidade:

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$$

O princípio (2) prescreve a não ocorrência de regresso infinito na determinação dos conjuntos a partir de seus elementos. Ou seja, não pode haver uma sequência infinita de conjuntos tal que cada termo da sequência tem o termo seguinte como elemento. Uma tentativa de formalizar isso diretamente resultaria em algo do tipo $\neg(x_2 \in x_1 \wedge x_3 \in x_2 \wedge x_4 \in x_3 \wedge ...)$, mas isso não é uma fórmula. Contudo, se pensamos que um conjunto denotado por x tem como elementos exatamente os termos de uma sequência dada qualquer, então o princípio prescreve que se x possui pelo menos um elemento então não pode ser que para qualquer elemento de x há um elemento de x que é também elemento daquele elemento. Essa propriedade pode ser formalizada e é assim que o próximo axioma é obtido.

- Axioma da regularidade:

$$\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \to z \notin y))$$

Para cada fórmula A, se x é dado, então uma seleção de elementos de x é dada por A: Os elementos z de x que satisfazem A. Segundo o princípio (3), essa seleção de elementos de x determina um y. Se fosse o caso que as seleções arbitrárias de elementos são exatamente as seleções dadas por fórmulas, então o princípio (3) seria completamente formalizado pelo esquema seguinte.

- Axioma da separação:

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge A)),$$

em que A é uma fórmula qualquer e o pronome y não ocorre em A.

Para cada fórmula A, se x é dado e A é tal que para todo x_1 existe um único y_1 tal que A, então uma troca de elementos de x é dada por A: A troca dos elementos x_1 pelos y_1 correspondentes de acordo com A. Segundo o princípio (4), essa troca de elementos de x determina um y. Se fosse o caso que as trocas arbitrárias de elementos são exatamente as trocas dadas por fórmulas, então o princípio (4) seria completamente formalizado pelo esquema seguinte.

- Axioma da troca:

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall y_2(A \wedge (A_{y_1}[y_2] \rightarrow y_1 = y_2)) \rightarrow \exists y \forall y_1(y_1 \in y \leftrightarrow \exists x_1(x_1 \in x \wedge A),$$

em que A é uma fórmula qualquer e os pronomes y e y_2 não ocorrem em A.

Os próximos dois axiomas são formalizações diretas dos princípios (5) e (6).

- Axioma da união:

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w)).$$

- Axioma das partes:

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x)).$$

O princípio (7) poderia ser formalizado por meio de uma descrição direta do que seria a infinitude de um conjunto. A formalização usual é mais indireta, contudo, e é a que apresentamos aqui. Vamos abreviar a fórmula $\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \notin y))$ por $\emptyset \in x$. A expressão para o próximo axioma deve ser entendida como a abreviação da fórmula correspondente.

- Axioma do infinito:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall w(w \in z \rightarrow w \in y \vee w = y))))$$

114. Exercício. Mostre que se ocorrências livres de y são permitidas na fórmula da separação, então é possível deduzir uma contradição (e qualquer outra fórmula) a partir de $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y))$.

2. Primeiros Passos Formais em ZF

Vamos dar uma pequena amostra de como desenvolver formalmente a teoria de conjuntos a partir dos axiomas, nos concentrando na introdução de nomes próprios e de símbolos de predicado. Todos os nomes próprios considerados abaixo são novos, já que na assinatura inicial não há nomes próprios. Não é difícil se convencer que nosso aparato formal é suficiente para os raciocínios usualmente empregados na matemática, mas é ao mesmo tempo impraticável e nada esclarecedor escrever deduções formais aqui. Por isso, vamos descrever deduções formais, não apresentar toda a sequência de passos.

Por exemplo, podemos deduzir a sentença $\exists y \forall z(z \notin y)$ como segue. Considere o axioma da separação seguinte:

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \land z \neq z).$$

Agora, $(z \notin y) \leftrightarrow (z \in y \leftrightarrow z \in x \land z \neq z)$ é consequência tautológica do axioma $z = z$, portanto é dedutível. Através da substituição por equivalentes vemos que $\exists y \forall z(z \notin y)$ é dedutível a partir dos axiomas.

Vamos representar por $\emptyset$ um nome próprio novo introduzido com a descrição $\forall z(z \notin \emptyset)$. Seja a um nome próprio novo e assuma que $\forall z(z \notin a)$. Podemos deduzir, a partir dessa premissa, que $a = \emptyset$. De fato, a partir de $z \notin a$ e $z \notin \emptyset$ deduzimos $z \in a \leftrightarrow z \in \emptyset$ como consequência tautológica. Usando a instância apropriada do axioma da extensionalidade deduzimos que $a = \emptyset$. Agora também podemos deduzir a equivalência entre a fórmula abreviada no axioma do infinito e sua abreviação. Primeiro usamos o teorema da dedução para concluir que $\forall z(z \notin a) \to a = \emptyset$ é dedutível (a partir da descrição do nome $\emptyset$ e dos axiomas). Por outro lado, deduzimos

$$a = \emptyset \to (\forall z(z \notin a) \leftrightarrow \forall z(z \notin \emptyset)),$$

pela indiscernibilidade dos iguais. Disso segue, por consequência tautológica, que $a = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin a)$ é dedutível. Como a é um nome próprio novo, temos que $y = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin y)$ é dedutível, pelo teorema dos nomes próprios. A substituição por equivalentes mostra que

$$\exists y(y \in x \land \forall z(z \notin y)) \leftrightarrow \exists y(y \in x \land y = \emptyset)$$

é dedutível. A eliminação dos nomes aplicada à segunda componente mostra que

$$\exists y(y \in x \land \forall z(z \notin y)) \leftrightarrow \emptyset \in x$$

é dedutível, o que justifica agora a abreviação utilizada antes.

Vamos abreviar ainda mais nossas descrições de deduções. Ao descrever uma dedução não vamos raciocinar como se estivéssemos dentro do sistema formal, mas usando uma linguagem humana para descrever o desenvolvimento da teoria a partir dos axiomas.

Pelo axioma da união, $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in a \land z \in w))$, em que a é um nome próprio. Representamos por $\bigcup a$ um nome próprio introduzido com a descrição $\forall z(z \in \bigcup a \leftrightarrow \exists w(w \in a \land z \in w))$. Seja b um nome próprio novo e assuma que

$$\forall z(z \in b \leftrightarrow \exists w(w \in a \land z \in w)).$$

A partir dessa premissa e do axioma da extensionalidade segue que $b = \bigcup a$, com isso, que a união é unicamente determinada.

Seja a um nome próprio tal que a sentença $\exists y(y \in a)$ é dedutível. Seja b um nome próprio introduzido com a descrição $b \in a$. Vamos considerar agora o axioma da separação

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in b \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)).$$

Representamos por $\bigcap a$ um nome próprio introduzido com a descrição

$$\forall z(z \in \bigcap a \leftrightarrow z \in b \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)).$$

Sejam c um nome próprio introduzido com a descrição $c \in a$ e d um nome próprio introduzido com a descrição

$$\forall z(z \in d \leftrightarrow z \in c \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)).$$

Para deduzir $d = \bigcap a$ basta deduzir

$$(z \in c \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)) \leftrightarrow (z \in b \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)).$$

Pelo teorema da substituição, temos $\forall w(w \in a \rightarrow z \in w) \rightarrow (b \in a \rightarrow z \in b)$ e $\forall w(w \in a \rightarrow z \in w) \rightarrow (c \in a \rightarrow z \in c)$. A partir de $b \in a$ e $c \in a$ temos, por consequência tautológica, que $\forall w(w \in a \rightarrow z \in w) \rightarrow z \in b$ e $\forall w(w \in a \rightarrow z \in w) \rightarrow z \in c$. Portanto,

$$(z \in c \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)) \leftrightarrow (z \in b \wedge \forall w(w \in a \rightarrow z \in w)),$$

por consequência tautológica, e $d = \bigcap a$ pelo axioma da extensionalidade. Concluímos que a interseção é unicamente determinada.

Analogamente, se a é um nome próprio qualquer, então a partir do axioma das partes temos $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in a))$. Representamos por $\wp(a)$ um nome próprio introduzido com a descrição

$$\forall z(z \in \wp(a) \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in a)).$$

Como antes, se b é um nome próprio, então a partir de

$$\forall z(z \in b \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in a))$$

e do axioma da extensionalidade deduzimos $b = \wp(a)$.

Outros nomes usuais podem ser introduzidos com descrições apropriadas: Sejam a e b nomes próprios novos. Os nomes $a \cup b$, $a \cap b$, $a \setminus b$, $\{a, b\}$ e (a, b) para "união de a e b", "interseção de a e b", "diferença de a e b", "par não-ordenado de a e b" e "par ordenado de a e b" podem ser introduzidos com as descrições usuais, já que as sentenças existenciais correspondentes são dedutíveis a partir dos axiomas. Por exemplo, $a \setminus b$ pode ser introduzido com a descrição $\forall x(x \in a \setminus b \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin b)$ e (a, b) pode ser introduzido com $\forall x(x \in (a, b) \leftrightarrow (\forall y(y \in x \leftrightarrow y = a) \vee \forall y(y \in x \leftrightarrow y = a \vee y = b)))$. É conveniente introduzir também o nome $\{a\}$ para "unitário de a".

O símbolo de relação $\subseteq$ para "está contido em" pode ser introduzido com a descrição $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ e o símbolo de propriedade Tr para "é transitivo" pode ser introduzido com $Tr(x) \leftrightarrow \forall y(y \in x \rightarrow y \subseteq x)$. O símbolo de predicado Op para "é par ordenado de" pode ser introduzido com

$$Op(x, x_1, x_2) \leftrightarrow \forall y(y \in x \leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2(\forall w(w \in y \leftrightarrow w = z_1 \vee w = z_2) \wedge \forall w(w \in z_1 \leftrightarrow w = x_1) \wedge \forall w(w \in z_2 \leftrightarrow w = x_1 \vee w = x_2)))$$

Os símbolos de propriedade Rl e Fn para "é relação" e "é função", respectivamente, podem ser introduzidos com as descrições

$$Rl(x) \leftrightarrow \forall y(y \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 Op(y, y_1, y_2))$$

e

$$Fn(x) \leftrightarrow Rl(x) \wedge \forall y \forall z \forall w \forall y_2 \forall z_2((y \in x \wedge z \in x \wedge Op(y, w, y_2) \wedge Op(z, w, z_2)) \to y_2 = z_2).$$

O símbolo de propriedade Ind para "é indutivo" pode ser introduzida com a descrição

$$Ind(x) \leftrightarrow \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to \exists z(z \in x \wedge \forall w(w \in z \to w \in y \vee w = y)))),$$

presente no axioma do infinito.

Vamos retomar o caso de nomes próprios usualmente introduzidos em teoria de conjuntos. Se A é uma fórmula, que pode conter símbolos introduzidos com uma descrição, tal que x não ocorre em A e tal que $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow A)$ é uma sentença dedutível, então representamos por $\{y : A\}$ um nome próprio introduzido com a descrição

$$\forall y(y \in \{y : A\} \leftrightarrow A).$$

Se a é um nome próprio tal que $\forall y(y \in a \leftrightarrow A)$, então $a = \{y : A\}$ segue do axioma da extensionalidade.

Para fechar essa pequena amostra de desenvolvimento formal, vamos mostrar que o nome próprio $\mathbb{N}$ pode ser introduzido com a descrição

$$Ind(\mathbb{N}) \wedge \forall z(Ind(z) \to \mathbb{N} \subseteq z).$$

É preciso mostrar que as condições de existência e unicidade para tal descrição são dedutíveis. Pelo axioma do infinito, $\exists x Ind(x)$. Seja a um nome próprio novo tal que $Ind(a)$. Pelo axioma da separação,

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in \wp(a) \wedge Ind(z))).$$

Introduzimos os nomes próprios

$$\{z : z \in \wp(a) \wedge Ind(z)\} \text{ e } \bigcap \{z : z \in \wp(a) \wedge Ind(z)\},$$

representados por b e c, respectivamente, para abreviar. A sentença

$$Ind(c) \wedge \forall z(Ind(z) \to c \subseteq z)$$

é dedutível usando as descrições de a, b e c. De fato, se d é outro nome próprio novo. A partir da premissa $Ind(d)$, as sentenças $d \cap a \in \wp(a)$ e $d \cap a \in b$ são dedutíveis. Agora, $\bigcap b \subseteq d \cap a$ e $c \subseteq d$ são dedutíveis a partir de $d \cap a \in b$. Pelo teorema da dedução,

$$Ind(d) \to c \subseteq d$$

é dedutível a partir das descrições dos nomes próprios a, b e c. Pelo teorema dos nomes próprios e pela regra de generalização,

$$\forall z(Ind(z) \to c \subseteq z).$$

Mas $Ind(c)$ também é dedutível a partir das descrições acima. Pela conservatividade da introdução de nomes próprios com uma descrição,

$$\exists y(Ind(y) \wedge \forall z(Ind(z) \to y \subseteq z)).$$

Introduzimos o nome $\mathbb{N}$ com a descrição

$$Ind(\mathbb{N}) \wedge \forall x(Ind(x) \to \mathbb{N} \subseteq x).$$

Se a é qualquer nome próprio tal que $Ind(a) \wedge \forall x(Ind(x) \to a \subseteq x)$, então tanto $\mathbb{N} \subseteq a$ quanto $a \subseteq \mathbb{N}$ são dedutíveis a partir dessas descrições. Disso segue a condição de unicidade.

Esses pequenos passos formais em teoria de conjuntos tem por finalidade apenas ilustrar uma parte inicial do desenvolvimento interno dessa teoria com o emprego dos resultados demonstrados nos dois primeiros capítulos. Claro que tal desenvolvimento extrapola, em muito, essa amostra aqui apresentada e, além disso, a metateoria desse sistema também se encontra muito desenvolvida. Decidimos incluir este pequeno apêndice pois, como já dissemos, trata-se de uma representação formal padrão da matemática que não pode ser ignorada por quem pretende seguir em frente nos estudos fundacionais conduzidos no campo da lógica.

115. Exercício. Complete a demonstração da condição de existência para a introdução do nome próprio $\mathbb{N}$ mostrando que $Ind(c)$ também é dedutível a partir das descrições dos nomes próprios a, b e c, conforme o antepenúltimo parágrafo acima.

Índice Remissivo

I.S.B.N. 978-65-900390-0-2